Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Ersatzanwesenheitsübung zur Höheren Mathematik IV
SS 1995

Aufgabe 1:

(2,5) a.) Man bestimme diejenige gebrochen–lineare Abbildung $w = f(z)$, welche die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$ der Reihe nach auf $w_1 = 0$, $w_2 = i$, $w_3 = 2i$ abbildet.

b.) Man bestimme das Bild der Menge

$$M = \left\{ z \,\middle|\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \operatorname{Re} z > 0 \right\} .$$

Aufgabe 2: Es sei $\mathcal{C} : z = z(t) = e^{it}$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Mittels Partialbruchzerlegung beweise man unter Beachtung von

(3,0) $$\log z = \log |z| + i \arg z \quad \text{mit} \quad z = |z|\, e^{i\varphi}\,, \quad -\pi < \varphi = \arg z \leq \pi .$$

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \frac{|z|\, dz}{z^2 + 4\,|z|} \right| = \frac{1}{2} \log 3 .$$

Aufgabe 3: Man bestimme alle möglichen Laurentreihenentwicklungen von

(4,0) $$f(z) = \frac{1}{z(z-3i)} \qquad \big(z \neq 0\,,\ z \neq 3i\big)$$

um den Punkt $z_0 = i$.

Aufgabe 4: Man beweise die Existenz des Integrals

(3,0) $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\, dx$$

und berechne seinen Wert mit Hilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 5: Das komplexe Strömungspotential

(3,5) $$f(z) = \log\big(z - (1+i)\big) + \log\big(z - (1-i)\big) \qquad (\operatorname{Im} z \geq 0)$$

$$\big(\log z = \log |z| + i \arg z \quad \text{mit} \quad \arg z \in (-\pi, \pi] \big)$$

beschreibt eine Quellströmung aus dem Punkt $z_0 = 1 + i$ heraus gegen eine unendlich ausgedehnten Platte (x–Achse).

a.) Man zeige, daß $z = x$ $(-\infty < x < \infty)$ Stromlinie ist.

b.) Man bestimme den Staupunkt der Strömung.

c.) Man bestimme das Geschwindigkeitsfeld $\underline{v} = \underline{v}(x,y)$ in den Punkten $z_1 = 2$, $z_2 = -2$, $z_3 = 2 + i$.
