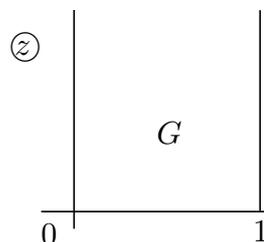


1. Aufgabe: Man bestimme das Bild des skizzierten Gebietes

$$(3) \quad G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$$

bei der Abbildung

$$w = f(z) = \frac{2z + i}{z} .$$



2. Aufgabe: Man zeige, daß es genau eine in \mathbb{C} analytische Funktion f gibt, für die $\operatorname{Re} \{f(z)\} = 2(x-1)y$

$$(3) \quad (z = x + iy, f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y))$$

und $\int_0^1 f(z) dz = 0$ gilt .

Man berechne $f'(z)$, $f''(z)$.

3. Aufgabe: Gegeben sei die Funktion

$$(4) \quad F(z) = \int_{|\zeta|=1}^{\circlearrowleft} \frac{(\zeta + z)^3 + \cos(2\zeta) - 4\zeta^2 \sin^2 z}{(\zeta - z)^3} d\zeta \quad (|z| \neq 1)$$

a.) Man beweise, daß F in $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ linear ist.

b.) Gibt es ein $z_1 \in K$ mit $F(z_1) = 0$?

Berechnen Sie gegebenenfalls z_1 .

c.) Gibt es ein $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \bar{K}$ mit $F(z_2) = 1$?

Berechnen Sie gegebenenfalls z_2 .

4. Aufgabe: Gegeben sei die Funktion f mit $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{-2, 4\}$ und

$$f(z) = \frac{z}{(z-4)^2} + \log(2+z) .$$

(6) Hierbei ist $\log \zeta = \log |\zeta| + i \arg \zeta$, $-\pi < \arg \zeta \leq \pi$ für alle $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

a.) Man bestimme die Laurentreihe von f in $|z| < 2$.

b.) Man bestimme die Laurentreihe von f in $0 < |z-4| < 6$.