Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik IV
SS 1999

---

1. Aufgabe: Man bestimme alle Lösungen w der Gleichung

(2,5)

$$w = \sqrt{\left\{5i\right\}^{\frac{4i}{\pi}}} \ ,$$

welche $|w| > \dfrac{1}{1000}$ erfüllen .

Hinweis: $\log 1000 = 6,90775\ldots$.

---

2. Aufgabe: Gegeben seien die Möbiustransformationen

(3,5)

$$f(z) := \frac{iz+1}{z+3i} \qquad \text{und} \qquad g(z) := \frac{-3iz+1}{z-i}$$

und die Teilmengen der komplexen Ebene

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = -i+t ,\ t \in \mathbb{R}\} ,$$

$$K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z+2i| = 1\} ,\ K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = 2\} .$$

Man beantworte folgende Fragen entweder mit **„Ja"** oder mit **„Nein"** (eine Begründung ist nicht erforderlich) :

(a) Ist f Umkehrabbildung von g, d.h. gilt $g\big(f(z)\big) = z$?

(b) Besitzt f zwei verschiedene Fixpunkte ?

(c) Besitzt g den Fixpunkt $2i$?

(d) Gilt $f'(0) = 1$?

(e) Ist das Bild der Geraden G_1 bei der Abbildung g der Kreis K_1, also $g(G_1) = K_1$?

(f) Ist das Bild der reellen Achse unter der Abbildung g der Kreis K_2 ?

(g) Bildet f das Innere des Einheitskreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ auf ein beschränktes Gebiet ab ?

<u>Zur Bewertung von Aufgabe 2:</u>

Für jede richtige Antwort gibt es 0,5 Punkte; jede falsche Antwort führt zu einen Abzug von 0,5 Punkten. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

---

3. Aufgabe: Es sei $\log z = \log|z| + i \arg z$ mit

(2,5)

$$-\pi < \arg z \leq \pi \quad \text{und} \quad \Gamma : z = e^{it} ,\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} .$$

Man berechne

$$I = \int_\Gamma \frac{\log z}{(z+2i)^2}\, dz$$

und bestimme den Zahlenwert von $\mathrm{Re}\,\{I\}$.

---

b i t t e   w e n d e n !!

4. Aufgabe: Man berechne

(3) $$I = \oint_{|z|=2} \frac{1}{z+3} \exp\left\{\frac{1}{z-1}\right\} dz$$

und finde für die komplexe Zahl I eine geschlossene Darstellung .

---

5. Aufgabe: Man berechne

(4,5) $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)\,(x^2+4)}\, dx$$

unter Verwendung des Residuensatzes .

Hinweis: Die Existenz von I ist nachzuweisen; eventuell auftretende Randintegrale sind exakt abzuschätzen .
