Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik IV
SS 2001

---

1. Aufgabe: Die Funktion

(16)

$$v(x,y) \;=\; e^{-y}(x\cos x \;-\; y\sin x)\;, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\;,$$

ist Imaginärteil einer auf $\mathbb{C}$ analytischen Funktion f (das ist so und braucht nicht bewiesen werden!) .

Man bestimme $f(z)$ und $f'(z)$ in geschlossener Form.

---

2. Aufgabe: Es seien $f(z) \;=\; \dfrac{az+b}{cz+d}\;\Big(z\;\neq\;-\dfrac{d}{c}\Big)$ mit $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ und $ad-bc\neq 0$;

(20)

$$g(z) \;=\; \frac{4z-1}{z-4}\quad\big(z\neq 4\big)\;;\quad h(z)\;=\;\frac{2z}{z-2}\quad\big(z\neq 2\big)\;;$$

$$\ell(z)\;=\;\begin{cases} 1\Big/\sin\dfrac{1}{z} & \text{für}\quad \sin\dfrac{1}{z}\;\neq\;0\\[2ex] 0 & \text{für}\quad \sin\dfrac{1}{z}\;=\;0\end{cases}$$

Man beantworte folgende Fragen entweder mit **„Ja“** oder mit **„Nein“**
(eine Begründung ist nicht erforderlich):

(a) Gibt es eine Abbildung $w=f(z)$ mit $\big|f(z)\big|<100$ für alle $z\in\mathbb{C}\setminus\big\{-\frac{d}{c}\big\}$?

(b) Gibt es eine Abbildung $w=f(z)$ $(z\neq-\frac{d}{c})$ mit $f^{-1}=f$
$(z=f^{-1}(w)$ ist die Umkehrabbildung zu $w=f(z))$?

(c) Gilt $\big|g(z)\big|<2$ für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|<1$?

(d) Bildet $w=g(z)$ die obere Halbebene $\{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Im}\ z>0\}$ auf die obere Halbebene $\{w\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Im}\ w>0\}$ ab ?

(e) Bildet $w=g(z)$ den Einheitskreis $\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}$ auf den Kreis $\{w\in\mathbb{C}:\ |w|=2\}$ ab ?

(f) Besitzt $h\big(h(z)\big)$ mehr als einen Fixpunkt ?

(g) Besitzt $h\big(h(z)\big)$ in $z=2$ eine hebbare Singularität ?

(h) Besitzt $e^{h(z)}$ in $z=2$ einen Pol der Ordnung 1 ?

(i) Besitzt $\sin\big\{h(z)\big\}$ in $z=2$ eine wesentliche Singularität ?

(j) Besitzt $\ell(z)$ in $z=0$ eine isolierte Singularität ?

<u>Zur Bewertung von Aufgabe 2:</u>

Für jede richtige Antwort gibt es 2 Punkte; jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 2 Punkten, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

---

b i t t e   w e n d e n !!!

3. Aufgabe: Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit

(8)

$$f(z) \;=\; f(x+iy) \;=\; u(x,y) \;+\; iv(x,y)$$

und

$$\big|u(x,y)\big| \;\leq\; \big|v(x,y)\big| \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big) \;.$$

Mit dem Satz von Liouville beweise man:

$$f(z) \;\equiv\; \text{const.} \qquad (z \in \mathbb{C}) \;.$$

---

4. Aufgabe: Man entwickle

(10)

$$f(z) \;=\; (4z-7)\, \frac{\sinh\,(z-1)}{(z-1)^4} \qquad (z \neq 1)$$

in $0 \;<\; |z-1| \;<\; \infty$ in eine Laurentreihe und gebe die Koeffizienten der Laurentreihe explizit an.

---

5. Aufgabe: Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes

(16)

$$I \;=\; \oint\limits_{|z|=4} \left\{ \left(z - 12z^3\right) \left(1 - \cos\,\frac{1}{z}\right) \;-\; \frac{24\cos\!\left(\dfrac{\pi}{2}\; z\right)}{(z-1)^4} \right\} dz \;.$$
