**Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen**
**Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans**
**Ersatzanwesenheitsübung zur Höheren Mathematik IV**
**SS 2001**

---

**1. Aufgabe:** Es seien $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \left(z \neq -\dfrac{d}{c}\right)$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ und $ad-bc \neq 0$ ;

*(20)*

$$g(z) = \frac{5z-1}{z-5} \quad \left(z \neq 5\right) \; ; \quad h(z) = \frac{3z}{z-3} \quad \left(z \neq 3\right) \; ;$$

$$\ell(z) = \begin{cases} 1 \Big/ \sin \dfrac{i}{z} & \text{für} \quad \sin \dfrac{i}{z} \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad \sin \dfrac{i}{z} = 0 \end{cases}$$

Man beantworte folgende Fragen entweder mit **„Ja"** oder mit **„Nein"**
(eine Begründung ist nicht erforderlich):

**(a)** Gibt es eine Abbildung $w = f(z)$ mit $\left|f(z)\right| < 20$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ ?

**(b)** Gibt es eine Abbildung $w = f(z)$ $(z \neq -\frac{d}{c})$ mit $f^{-1} = f$
$(z = f^{-1}(w)$ ist die Umkehrabbildung zu $w = f(z))$ ?

**(c)** Gilt $\left|g(z)\right| < 2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ?

**(d)** Bildet $w = g(z)$ die untere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \text{ Im } z < 0\}$ auf die untere Halbebene $\{w \in \mathbb{C} : \text{ Im } w < 0\}$ ab ?

**(e)** Bildet $w = g(z)$ den Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ auf den Kreis $\{w \in \mathbb{C} : |w| = 2\}$ ab ?

**(f)** Besitzt $h\big(h(z)\big)$ mehr als einen Fixpunkt ?

**(g)** Besitzt $h\big(h(z)\big)$ in $z = 3$ eine hebbare Singularität ?

**(h)** Besitzt $e^{h(z)}$ in $z = 3$ einen Pol der Ordnung 1 ?

**(i)** Besitzt $\sin \big\{h(z)\big\}$ in $z = 3$ eine wesentliche Singularität ?

**(j)** Besitzt $\ell(z)$ in $z = 0$ eine isolierte Singularität ?

**<u>Zur Bewertung von Aufgabe 1:</u>**

Für jede richtige Antwort gibt es 2 Punkte; jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 2 Punkten, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

---

**2. Aufgabe:** Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit

(10)

$$3u^2(x,y) \cdot v(x,y) \; - \; v^3(x,y) \; \geq \; 100 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big) \; .$$

Mit dem Satz von Liouville beweise man:

$$f(z) \; \equiv \; \text{const.} \qquad (z \in \mathbb{C}) \; .$$

---

**3. Aufgabe:** (14) Es sei $\lambda > 0$ fest. Man gebe für

$$F(\lambda) \;:=\; \oint\limits_{|\zeta| \,=\, 2\lambda} \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{\lambda}\,\zeta\right)}{(\zeta-\lambda)^2\;(\zeta+3\lambda)}\;d\zeta$$

eine integralfreie Darstellung an.

---

**4. Aufgabe:** (12) Gegeben sei die Funktion $f:\; \mathbb{C}\setminus\{0,2\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z^2(z-2)} \;\; .$$

Man gebe alle möglichen Laurentreihen von $f$ um den Punkt $z_0 = 0$ an, und bestimme explizit die zugehörigen Koeffizienten.

---

**5. Aufgabe:** (14) Mit Hilfe des Residuensatzes berechne man

$$I \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4} \;\; ,$$

indem man zunächst die Existenz von $I$ nachweist und dann ein geeignetes komplexes Integral betrachtet.

---