Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. S. Maier–Paape
Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik IV
SS 2003

---

1. Aufgabe: Man skizziere das Gebiet

(14)

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 0 \, , \, 0 < x < x^2 + y^2 < 1\}$$

und berechne

$$I = \int_G \frac{y}{1 + (x^2+y^2)^2} \, d(x,y) \, .$$

---

2. Aufgabe: Im Gebiet

(14)

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$$

wird das Kurvenintegral

$$I(\Gamma) = \int_\Gamma f \cdot d\gamma$$

mit dem Vektorfeld $f\colon \ \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = \frac{(y^2 z, -xz^2, x^2 y)}{2x^2 + y^2 + 7z^2} \qquad (x^2+y^2+z^2 > 0)$$

betrachtet.

(a) Man berechne $I(\Gamma)$ für

$$\Gamma\colon \ \gamma(t) = (\cos t, \ 3\sin t, \ \cos t) \, , \quad 0 \le t \le 2\pi \, .$$

(b) Ist $I(\Gamma)$ in G vom Wege unabhängig?

---

3. Aufgabe: Gegeben seien das Vektorfeld $f\colon \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

(16)

$$f(x,y,z) = (y^2, x^2 - z^2, y^2) + \operatorname{grad} e^{x^2+y^2+z^2}$$

und die Raumkurve

$$\Gamma\colon \ \gamma(t) = \left(-1 + \sqrt{10}\ \sin t, \ \sqrt{10}\ \cos t, \ -2 + 2\sqrt{10}\ \sin t\right) , \quad 0 \le t \le 2\pi \, .$$

Man berechne $I = \int_\Gamma f \cdot d\gamma$ mit Hilfe des Stokesschen Satzes, indem man I in ein Oberflächenintegral verwandelt und dieses berechnet (hierbei mag es nützlich sein, die Polarkoordinaten $x = -1 + r \ \cos\varphi$, $y = r \ \sin\varphi$ zu verwenden).

---

b i t t e w e n d e n !!!

4. Aufgabe: **(a)** Man zeige, dass die Differentialgleichung

(12)

$$Dy \;\equiv\; e^x\left(-1+x+y+\sqrt{x+y} \;+\; \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right) \;+\; e^x\left(1 \;+\; \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right) y' \;=\; 0$$

im Gebiet $G = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x+y>0\big\}$ exakt ist.

(b) Man bestimme die Lösung $y = y(x)$ des Anfangswertproblems

$$Dy \;=\; 0\;, \quad y(3) \;=\; -2\;.$$

---

5. Aufgabe: Es sei $f(x) \;=\; \cos\dfrac{x}{2}\;,\; -\pi \le x \le \pi$ und

(14)

$$f(x+2\pi) \;=\; f(x) \qquad (x \in \mathbb{R})\;.$$

(a) Man bestimme die von f erzeugte Fourierreihe

$$T_f(x) \;=\; \frac{a_0}{2} \;+\; \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_n\cos(nx) \;+\; b_n\sin(nx)\Big\}\;.$$

(b) Man bestimme den Zahlenwert von

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2 \;-\; 1}\;.$$
