**Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen**
**Institut für Mathematik, Prof. Dr. S. Maier–Paape**
**Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik IV**
**SS 2003**

---

## Wichtiger Hinweis:

- Die **Elektrotechniker** müssen nur die Aufgaben 1 bis 5 bearbeiten.
- Die **Physiker** müssen zusätzlich Aufgabe 6 bearbeiten, dürfen dafür aber entweder Aufgabe 2 oder 3 weglassen. Werden trotzdem alle Aufgaben bearbeitet, wird für die Physiker das schlechtere Ergebnis der Aufgaben 2 und 3 gestrichen.

---

**1. Aufgabe:** Man bestimme alle komplexen Zahlen $w$ mit

*(6)* **(a)** $w^2 = e^{i\pi} \cdot \log i \quad \text{und} \quad \pi < |w|^2 < 5\pi$

*(4)* **(b)** Es sei $z_0 = (-i \cdot e)^{\left(-\frac{3}{2}\pi i\right)}$. Man bestimme $|z_0|$ und $\arg z_0$.

---

**2. Aufgabe:** Man gebe eine gebrochene lineare Abbildung

(16)
$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

an, welche die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = \infty$ der Reihe nach auf $w_1 = 0$, $w_2 = 2$, $w_3 = 2+2i$ abbildet.

Auf welchen Bereich wird $H = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ z = x+iy\ ,\ x+y \geq 0\right\}$ durch $f$ abgebildet?

---

**3. Aufgabe:** Die Funktion

(16)
$$f(z) = 2^z + \frac{4}{(z-1)^2\,(z+1)}$$

ist für $z \neq 1$, $z \neq -1$ holomorph. Man entwickle $f$ im Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| > 1\}$ in eine Laurent–Reihe.

---

**4. Aufgabe:** Es sei $f\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und

(8)
$$2 \cdot \left|\mathrm{Re}\,\left\{f(z)\right\}\right| \leq \left|\mathrm{Im}\,\left\{f(z)\right\}\right| + 1 \quad (z \in \mathbb{C})\ .$$

Man beweise: $f(z) \equiv \text{konst.} \quad (z \in \mathbb{C})$ .

---

**b i t t e  w e n d e n !!!**

**5. Aufgabe:**

*(4)* **(a)** Man bestimme $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \cosh \frac{1}{z} = 0 \right\}$ .

*(8)* **(b)** Es sei $f(z) = \dfrac{1}{z \cosh \frac{1}{z}}$ $\quad (z \neq 0 \,,\; z \notin M)$ .

Man berechne $\displaystyle\oint_{|z|=1} f(z)\, dz$ .

**Hinweis:** Betrachten Sie auch $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z \cosh z}$ .

*(8)* **(c)** Man berechne $\operatorname{Res}\left( f, -\frac{2i}{\pi} \right)$ .

---

<u>**Nur für Physiker:**</u>

**6. Aufgabe:** Man zeige, dass die Funktion

*(16)*
$$h(x) = \begin{cases} x \,, & \text{für } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x \,, & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

in $\widetilde{H}^1(0,\pi)$ liegt $\Big($bezüglich der Sinus–Orthonormalbasis des $L^2(0,\pi)$: $f_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx) \,,\; k \in \mathbb{N}\Big)$ . Zeigen Sie auch, dass $h \notin \widetilde{H}^2(0,\pi)$ (bezüglich der Sinus–ONB) .

---