Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. S. Maier–Paape
Ersatzanwesenheitsübung zur Höheren Mathematik IV
SS 2003

---

1. Aufgabe: (10) Man beweise durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \;>\; 2\sqrt{n} \qquad (n = 3, 4, 5, ...)\ .$$

---

2. Aufgabe: (8) Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge reeller Zahlen und $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, welche konvergiert.

Man beweise, dass dann auch $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

---

3. Aufgabe: (15) Man zeige, dass

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad ..., \quad v_n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.

---

4. Aufgabe: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(6) **(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n!} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}$

(6) **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \left(e^{1/n} - 1\right)$

(10) **(c)** Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

konvergiert.

---

5. Aufgabe: Gegeben seien die Ebene E und die Gerade G mit

$$E = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : \; y = ta + sb, \; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$
$$G = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : \; y = p + sq, \; s \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(5) **(a)** Man zeige, dass E und G leeren Schnitt haben.

(10) **(b)** Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von p auf E und geben Sie die Ebene $\tilde{E}$, welche $P_E(p)$ und G enthält, in Hessescher Normalform an.
