Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. S. Maier–Paape
Ersatzanwesenheitsübung zur Höheren Mathematik IV
SS 2003

---

1. Aufgabe: (18) Gegeben sei eine gebrochen lineare Abbildung $w = f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, welche die Nullstelle $z_0 = i$ besitzt und für die

$$f(\xi) = f^{-1}(\xi) \qquad \left(\xi \neq -\frac{d}{c}\right)$$

gilt, wobei $\xi = \dfrac{i}{3}$ ein Fixpunkt von f ist.

(a) Man bestimme f mit der 6–Punkte–Formel und prüfe, ob f obige Eigenschaften hat.

(b) Man bestimme die Bilder der reellen und der imaginären Achse unter der Abbildung f.

---

2. Aufgabe: (7) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Man beweise oder widerlege

$$\Delta \left\{ \left| f(z) \right|^2 \right\} = 4 \left| f'(z) \right|^2 \qquad (z \in \mathbb{C}) .$$

---

3. Aufgabe: (12) Man berechne

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z \, \sin\left(\frac{4}{z}\right)} \quad .$$

---

4. Aufgabe: (15) Es sei $0 < r < \pi$ bzw. $\pi < r < 2\pi$. Man gebe für

$$F(r) = \oint\limits_{|z|=r} \frac{dz}{(e^z - 1)\,(e^{2z} - 1)}$$

eine integralfreie Darstellung an.

Hinweis: Reihenentwicklung kann hilfreich sein!

---

5. Aufgabe: (10) Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' + y = 2\cos t \,, & t \geq 0 \,, \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

mit Hilfe der Laplace–Transformation.

---

6. Aufgabe: (8) Beweisen Sie mittels Wahl eines geeigneten vollständigen Orthonormalsystems die eindimensionale Poincaré–Ungleichung:

$$\int\limits_0^\pi \left[u'(x)\right]^2 dx \geq \int\limits_0^\pi u^2(x)\, dx \quad \text{für} \quad u \in \left\{ v \in H^1\big((0,\pi)\big) \;\middle|\; v(0) = 0 = v(\pi) \right\} .$$

(Der Beweis muss hier erbracht werden. Verweise auf eventuell ähnlich klingende Übungsaufgaben werden nicht gewertet.)
