Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. S. Maier–Paape
Ersatzanwesenheitsübung zur Höheren Mathematik IV
SS 2003

---

1. Aufgabe: (14) Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f \;=\; f(x,y,z) \;=\; -\;\sin(\pi xyz)\;(yz, zx, xy) \;+\; \operatorname{grad}(xyz)\ .$$

(a) Ist das Kurvenintegral $I = \int\limits_\Gamma f \cdot d\gamma$ im $\mathbb{R}^3$ vom Wege unabhängig? (Begründung!)

(b) Man berechne I für

$$\Gamma\colon\ \gamma(t) \;=\; \left(t\ \cos(\pi t)\ ,\ t\ \sin\!\left(\frac{\pi}{2}\ t\right)\ ,\ t\right)\ ,\quad 0 \;\le\; t \;\le\; 1\ .$$

---

2. Aufgabe: (14) Gegeben sei der Körper

$$K \;=\; \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 8 \;-\; 2x \;<\; z \;<\; 16 \;-\; x^2 \;-\; y^2\right\}$$

mit der Berandung ∂K und das Vektorfeld $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) \;=\; (xy + yz + zx\ ,\ xz - yz\ ,\ z)\ .$$

Man berechne

$$I \;=\; \int\limits_{\partial K} f \cdot n\ do$$

(n äußere Einheitsnormale auf ∂K) mit dem Gaußschen Satz, indem man I in ein Volumenintegral verwandelt und dieses berechnet.

Hinweis: Dabei mag es nützlich sein, die Polarkoordinaten $x \;=\; 1 \;+\; r\ \cos\varphi\ ,\ y \;=\; r\ \sin\varphi$ zu verwenden.

---

3. Aufgabe: (18) Gegeben sei die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$f_n\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f_n(x) \;=\; \frac{x^3}{n^2}\ e^{-\ \frac{x^2}{n}}\ .$$

(a) Man beweise, dass $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ auf $\mathbb{R}$ konvergiert und berechne $f(x) \;:=\; \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

(b) Man beweise, dass $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) > 0$ so angibt, dass gilt:

$$n \;>\; N(\varepsilon)\ \wedge\ x \in \mathbb{R} \;\Longrightarrow\; \big|f(x) - f_n(x)\big| \;<\; \varepsilon\ .$$

Hinweis: Man berechne $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \big|f_n(x)\big|$.

(c) Man beweise oder widerlege: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty f_n(x)\ dx \;=\; \int\limits_0^\infty f(x)\ dx$.

---

b i t t e w e n d e n !!!

4. Aufgabe: Es sei $f(x) \; = \; x(\pi - x) \; , \; 0 \; \leq \; x \; \leq \; \pi \; ,$
(14)

$$f(-x) \; = \; f(x) \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) \; = \; f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}) \; .$$

(a) Man berechne die f zugeordnete Fourierreihe

$$T_f(x) \; = \; \frac{a_0}{2} \; + \; \sum_{n=1}^{\infty} \; a_n \; \cos(nx) \; + \; b_n \; \sin(nx) \; .$$

(b) Man bestimme den Zahlenwert von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ mit Hilfe von **(a)**.

---

5. Aufgabe: Gegeben sind die drei Urnen *Nr. 1* , *Nr. 2* und *Nr. 3*, welche wie folgt mit farbigen Kugeln gefüllt sind:
(10)

Urne Nr	**grün**	**rot**	**blau**
1	4	1	0
2	3	2	2
3	5	6	3

(a) Man wählt eine Urne aus und zieht dann eine Kugel aus dieser Urne.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie *1)* blau , bzw. *2)* rot , bzw. *3)* grün?

(b) Die gezogene Kugel sei grün. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus der Urne *Nr. 2* ?
