Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik IV

04.07.2007

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ hat in 0 einen Pol m–ter Ordnung für beliebiges $m \in \mathbb{N}$.

(b) Die Laplace–Transformation $\mathcal{L}\{h(t)\}(s)$ von $h(t) = \begin{cases} e^{t^2}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ existiert für alle s mit $Re(s) > 0$.

(c) $\Delta u = u_{tt}$ ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung.

(d) Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist f konform.

(e) Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph, so gilt $Res(f, z_0) = 0$.

(f) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $u\colon G \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann nimmt u in G weder Minimum noch Maximum an.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Die Durchmesser von neu produzierten Autokolben (in mm) seien $\mathcal{N}\left(45; \frac{1}{10}\right)$ verteilt. Ein Kolben ist unbrauchbar, wenn sein Durchmesser vom Sollwert $45mm$ um mehr als $0,15mm$ abweicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig der Produktion entnommener Kolben unbrauchbar?

Hinweis: Die Werte der Verteilungsfunktion der Normalverteilung entnehme man dem Beiblatt.

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und es gebe ein $C > 0$ mit

$$\mathrm{Im}\big(f(z)\big) < C \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Zeigen Sie: f ist konstant

Bitte wenden!!

Aufgabe 4 **[18 Punkte]**

Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(x)}{\sinh(2x)}\, dx \ .$$

Hinweis: Man benutze den Residuensatz für $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ mit den gerichteten Strecken Γ_j, welche

$$-R\,,\ R\,,\ R+\pi i\,,\ -R+\pi i \quad \text{und} \quad -R \quad (R \in \mathbb{R}^+)$$

verbinden.

Aufgabe 5 **[10 Punkte]**

Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung mit Hilfe der Laplace–Transformation:

$$\begin{aligned} ty''(t) + y'(t) + 4t\,y(t) &= 0 \\ y(0) &= 3\,,\ y'(0) = 0 \end{aligned}$$

Hinweis: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+4}}\right) = J_0(2t) =$ *Bessel–Funktion* 0–ter Ordnung, $J_0(0) = 1$

A1)

a) f

b) f

c) f

d) f

e) w

f) f

Aufgabe 2

X = Durchmesser eines Kolbens

X ist Normalverteilt mit Erwartungs-wert $\mu = 45$ und Standardabweichung $\sigma = \frac{1}{10}$. 1

$P(|X - 45| > 0,15)$ 4

$= 1 - P(|X - 45| \leq 0,15)$

$= 1 - P(44,85 \leq X \leq 45,15)$

$= 1 - \left(\phi\left(\frac{45 - 45,15}{0,1}\right) - \phi\left(\frac{44,85 - 45}{0,1}\right)\right)$ 2

$= 1 - (\phi(1,5) - \phi(-1,5))$

$= 2 - 2\,\phi(1,5)$ 1

$= 2 - 2 \cdot 0,9332$ 1

$= 0,1336$ 1

A 3)

Betrachte $\quad g(z) := e^{-if(z)}$ (3) $\quad z \in \mathbb{C}$

Dann gilt:

$$|g(z)| = |e^{-if(z)}| = |e^{-i\,Re(f(z))} \cdot e^{Im(f(z))}| = e^{Im(f(z))}$$

$$< e^{C} \quad (*)$$ (1)

Ferner ist mit f auch g eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die nach $(*)$ beschränkt ist.

Mit dem Satz von Liouville folgt, dass g konstant auf $\mathbb{C}$ ist, d.h. (2)

$$g(z) = K \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

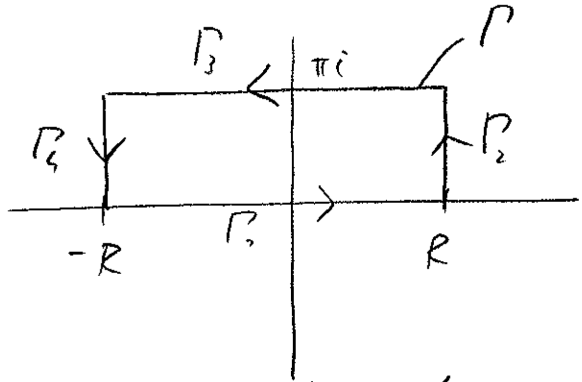
Also $\quad e^{-if(z)} = K$

$$\Leftrightarrow \quad f(z) = \frac{\log(K) + 2\pi i\, k(z)}{-i}, \quad k(z) \in \mathbb{Z}$$ (2)

Aufgrund der Stetigkeit von f ex. ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ mit $\quad f(z) = i \log(K) - 2\pi k_0 \in \mathbb{C}$.

D.h. f ist konstant. (2)

A 4) (1)



$\Gamma_1(t) = t \quad , t \in [-R, R] \quad , \Gamma_1'(t) = 1$

$\Gamma_2(t) = R + it\pi \quad , \quad t \in [0,1] \; , \; \Gamma_2'(t) = i\pi$

$\Gamma_3(t) = -t + i\pi \; , \quad t \in [-R, R] \; , \; \Gamma_3'(t) = -1$

$\Gamma_4(t) = -R + i(1-t)\pi \; , \quad t \in [0,1] \; , \; \Gamma_4'(t) = -i\pi$

Setze $f(z) = \dfrac{\sinh(z)}{\sinh(2z)} \quad , \; z \in \mathbb{C}$ (1)

f hat in 0 und πi eine hebbare Singularität, da (2)

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sinh(z)}{\sinh(2z)} \overset{\text{l'Hospidal}}{=} \lim_{z \to 0} \frac{\cosh(z)}{2\cosh(2z)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Analog $z \to \pi i$

Ferner sind die Nullstellen des Nenners von f:

$$\sinh(2z) = 0 \iff \frac{e^{2z} - e^{-2z}}{2} = 0$$

$$\iff z_l = i\frac{\pi l}{2} \quad l \in \mathbb{Z}$$ (2)

Von diesen Nullstellen liegt nur $z_1 = \frac{i\pi}{2}$ im Innern von Γ, daher gilt mit dem Residuensatz

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \frac{\sinh(z)}{\sinh(2z)}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_1)$$ (1)

Nun ist $\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_4} f(z)\,dz$

mit $$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{\sinh(t)}{\sinh(2t)}\,dt \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(t)}{\sinh(2t)}\,dt \quad 2$$

(Dieses Integral existiert als uneigentliches Riemannintegral)

$$\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz = -\int_{-R}^{R} \frac{\sinh(-t+i\pi)}{\sinh(2(-t+i\pi))}\,dt = \int_{-R}^{R} \frac{\sinh(-t)}{\sinh(2t)}\,dt$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\sinh(t)}{\sinh(2t)}\,dt \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(t)}{\sinh(2t)}\,dt \quad 2$$

$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \int_0^1 \left| i\pi \frac{\sinh(R+it\pi)}{\sinh(2(R+it\pi))}\right| dt$$

Δ-Ungl.

$$\leq \pi \int_0^1 \frac{e^{R} + e^{-R}}{e^{2R} - e^{-2R}}\,dt \leq \frac{2\pi e^{R}}{\frac{e^{2R}}{2}} = 4\pi e^{-R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

2

$$\left|\int_{\Gamma_4} f(z)\,dz\right| \leq \int_0^1 \left| -i\pi \frac{\sinh(-R+i(1-t)\pi)}{\sinh(2(-R+i(1-t)\pi))}\right| dt$$

Δ-Ungl.

$$\leq \pi \int_0^1 \frac{e^{-R} + e^{R}}{e^{2R} - e^{-2R}}\,dt \leq \frac{2\pi e^{R}}{\frac{e^{2R}}{2}} = 4\pi e^{-R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

2

③

Damit also:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(t)}{\sinh(2t)}\,dt = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_1)$$

z_1 ist Pol erster Ordnung von f, da

$$\lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_1)\sinh(z)}{\sinh(2z)} \overset{\text{l. Hospital}}{\underset{\downarrow}{=}} \sinh(z_1)\cdot\frac{1}{2\cosh(2z_1)} = \frac{\sinh(\frac{i\pi}{2})}{2\cosh(i\pi)}$$

$$= \frac{-i}{2} = \operatorname{Res}(f(z), z_1) \neq 0$$

④

Daher
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(t)}{\sinh(2t)}\,dt = \frac{1}{2}\left(2\pi i\cdot\left(\frac{-i}{2}\right)\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

A5)

$$\mathcal{L}(ty''(t))(s) + \mathcal{L}(y'(t))(s) + \mathcal{L}(4ty(t)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{d}{ds}\Big(s^2 \underline{Y}(s) - s\underbrace{y(0)}_{=3} - \underbrace{y'(0)}_{=0}\Big) + \big(s\underline{Y}(s) - y(0)\big) - 4\frac{d}{ds}\underline{Y}(s) = 0$$

4

$$\Leftrightarrow \quad (s^2+4)\frac{d}{ds}\underline{Y}(s) + s\underline{Y}(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{ds}\underline{Y}(s) = -\frac{s}{s^2+4}\underline{Y}(s)$$ 2

Lineare homogene DGL 1ter Ordnung für $\underline{Y}(s)$

$$\Rightarrow \quad \underline{Y}(s) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}\log(s^2+4)} = \frac{c}{\sqrt{s^2+4}}$$ 2

$$\Rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\underline{Y}(s))(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{s^2+4}}\right) = c\,J_0(2t)$$

Nun ist $y(0) = 3$ und $J_0(0) = 1$

$$3 = y(0) = c\,J_0(0) = c$$

Also $y(t) = \underline{\underline{3\,J_0(2t)}}$ 2