Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Ersatzanwesenheitsübung zur Höheren Mathematik IV

13.07.2007

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gilt: Zu jeder harmonischen Funktion $u\colon G \to \mathbb{R}$ existiert eine konjugiert harmonische Funktion.

(b) Jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ besitzt eine komplexe Stammfunktion.

(c) Jede holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ist konstant.

(d) Hat eine Funktion f in $z_0 \in \mathbb{C}$ einen Pol der Ordnung ℓ, dann hat $\exp \circ f$ in z_0 einen Pol der Ordnung $\ell + 1$.

(e) Die Varianz einer standardisierten Zufallsvariable $X^*\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ist immer 1.

(f) Jede Funktion $f \in \widetilde{H}^1(0,\pi)$ (Sobolew–Raum zum VONS $f_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in (0,\pi)$) ist schwach differenzierbar und $\partial_x f \in L^2(0,\pi)$.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Sei $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\}$ der Ergebnisraum für 2–maliges Werfen einer Laplace–Münze und $X_j\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$X_1(\omega_1,\omega_2) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls} \quad \omega_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \omega_2 = 0 \\ 1\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $X_2(\omega_1,\omega_2) = \omega_2$ seien Zufallsvariable.

Berechnen Sie $E(X_1)$, $E(X_2)$ und $E(X_1 \cdot X_2)$. Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig?

Bitte wenden!!

Aufgabe 3 [14 Punkte]

Bestimmen Sie diejenige Möbius–Transformation, welche die Kreisscheibe $\left|z - (1+i)\right| < 1$ so auf die Halbebene $\{w \in \mathbb{C}\colon \mathit{Re}(w) < 0\}$ abbildet, dass der Mittelpunkt der Kreisscheibe auf den Punkt $-1 + i$ und 1 auf den Punkt i abgebildet wird.

Aufgabe 4 [12 Punkte]

Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz\,.$$

Aufgabe 5 [12 Punkte]

Bestimmen Sie die Laurent–Entwicklung von

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2\,(z-2)}\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}\,,$$

im Punkt $a = 2$ für $|z-2| > 1$.

A 1) a) w

b) f

c) w

d) f

e) w

f) w

A2)

$$E(X_1) = \sum_{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega = \{0,1\}^2} X_1(\omega) \cdot p(\{\omega\}) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

3

Da Laplace Münze ist p die Gleichverteilung $p(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ wegen $|\Omega| = |\{0,1\}^2| = 4$.

$$E(X_2) = \sum_{\omega \in \Omega} X_2(\omega) \cdot p(\{\omega\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

3

Ferner $E(X_1 \cdot X_2) = \sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) \; p(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$

3

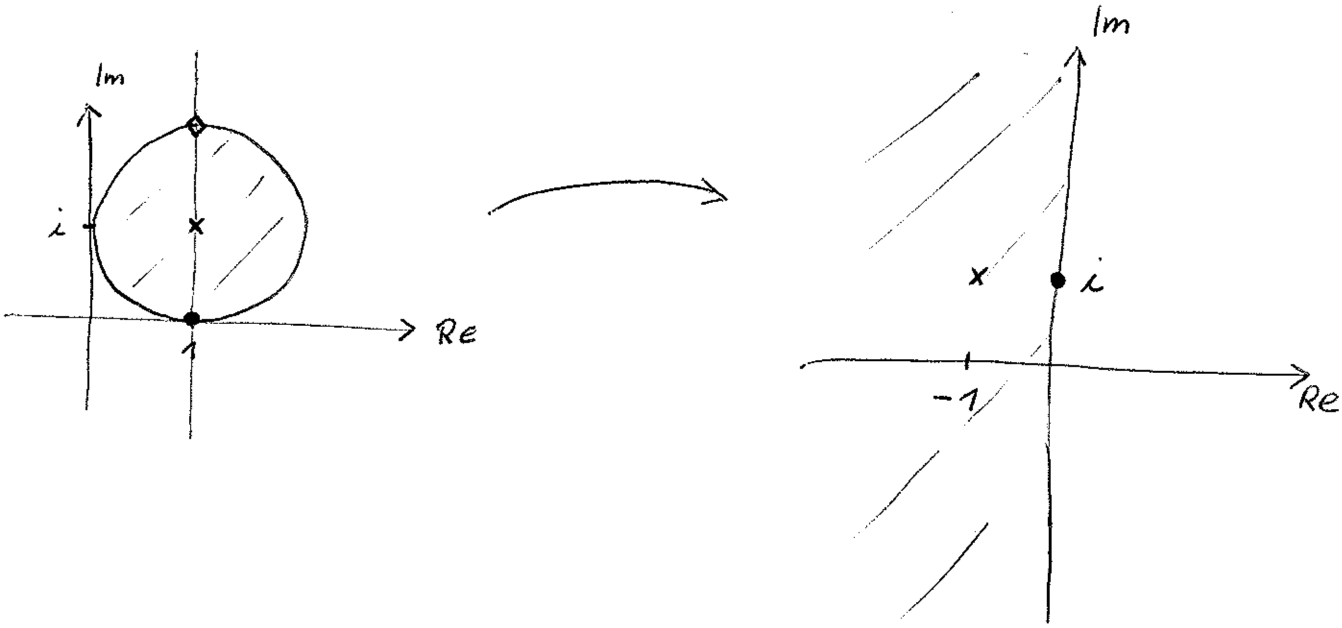
Da gilt $E(X_1) \cdot E(X_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

und $E(X_1 X_2) = \frac{1}{4}$

können X_1 und X_2 nicht stochastisch unabhängig sein!

1

A3)



Nach Aufgabenstellung erfüllt die Möbiustransformation

$w(1) = i$ und $w(1+i) = -1+i$.

Wir benötigen noch den Bildpunkt eines weiteren Punktes, um mit der Invarianz des Doppelverhältnisses die Möbiustransformation zu bestimmen. Diesen finden wir unter Berücksichtigung der Tatsache, dass Möbiustransformationen konform sind: Der Kreis $|z-(1+i)|<1$ und die Gerade $\mathrm{Re}(z) = 1$ schneiden sich im Punkt 1 unter dem Winkel $90°$. Ihre Bilder können sich aber nur unter dem gleichen Winkel schneiden, wenn der Punkt $1+2i$ auf ∞ abgebildet wird. Damit haben wir den dritten Punkt: $w(1+2i) = \infty$ (4)

Jetzt gilt mit der Invarianz des Doppelverhältnisses:

$$\frac{w-i}{w-(-1+i)} = \frac{z-1}{z-(1+i)} \cdot \frac{(1+2i)-(1+i)}{(1+2i)-1} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{w-i}{w-(-1+i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z-1}{z-(1+i)} \qquad \Rightarrow w = \frac{(1+i)z+(1-i)}{z-1-2i}$$

(6)

A 4)

$$\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz = \frac{2\pi i}{2\pi i} \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \int_{|z-1|=1} \frac{z^n}{(z-1)^{n-1+1}} dz$$

6

Cauchy Integralf.

$$\stackrel{\text{Cauchy Integralf.}}{=} \frac{2\pi i}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} z^n \Big|_{z=1} = \underline{\underline{2\pi i n}} \qquad n \in \mathbb{N}$$

da 1 im Inneren der Kurve $|z-1|=1$ liegt.

6

A 5)

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(1-z)^2} \qquad a = 2, \quad |z-2| > 1$$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{(z-2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(z-2)} \cdot \frac{1}{(z-2)^2\left(1 - \frac{-1}{z-2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{(z-2)^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{-1}{z-2}\right)^2}$$

6

Nun gilt $\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{l=1}^{\infty} l\, w^{l-1} \qquad |w| < 1$

4

Damit gilt:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^3} \sum_{l=1}^{\infty} l \left(\frac{-1}{z-2}\right)^{l-1}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} l\,(-1)^{l-1} \frac{1}{(z-2)^{l+2}}$$

2

Diese Laurentreihe konvergiert für $|z-2| > 1$