Prof. Dr. Josef Bemelmans
Institut für Mathematik, RWTH Aachen
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de

Telefon: +49(0)241-8094921
Fax: +49(0)241-8092323
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 110/111
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik IV (Bachelor / Vordiplom)
SS 2009
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

---

1. Aufgabe *(10 Punkte)*

Es sei

$$f(z) := \frac{i(z-1)}{z+i}$$

und $w := h(z)$ diejenige Möbius Transformation, für die

$$h(0) = i,\ h(i) = \infty,\ h(\infty) = 1$$

ist.

a) Bestimmen Sie $h(z)$.

b) Bestimmen Sie die Fixpunkte von $h(f(z))$.

2. Aufgabe *(9 Punkte)*

Berechnen Sie mit Hilfe der Integralformel von Cauchy das Integral

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz.$$

3. Aufgabe *(13 Punkte)*

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x^2-2x+2)} dx.$$

4. Aufgabe *(4 Punkte)*

Gibt es eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, mit mindestens einer isolierten Singularität in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, so dass

$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\, dz = 0\,?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

A1) a) 6 Punkte Formel

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$ 2

$z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = \infty$

$w_1 = i$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{w-i}{w-1} = \frac{z}{i}$$

[redacted]

$$\Leftrightarrow \quad w - i - \frac{zw}{i} + \frac{z}{i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad w\left(1 - \frac{z}{i}\right) = -\frac{z}{i} + i$$ 4

$$\Leftrightarrow \quad w = \frac{iz+i}{1+iz}, \quad \text{Also } h(z) = \frac{iz+i}{iz+1}$$

$$= \frac{-z-1}{i-z} = \frac{z+1}{z-i}$$

b) $$h(f(z)) = \frac{i\left(\frac{i(z-1)}{z+i}\right) + i}{i\left(\frac{i(z-1)}{z+i}\right) + 1}$$ 3

$$= \frac{(i-1)}{1+i} z$$

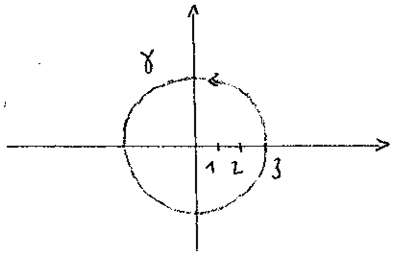
Damit sind die Fixpunkte von $h(f(z)) = z$ 1

[redacted]

genau $z = 0$ und $(z = \infty)$

Aufgabe 2

$$I := \oint_\gamma \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} \, dz$$



$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = 3e^{it}$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2} \overset{!}{=} \frac{1}{(z-1)(z-2)} \implies a = -1, \; b = 1$$

also, mit $f(z) := \cos(\pi z^2) + \sin(\pi z^2)$ holomorph:

$$I = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-2} \, dz - \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-1} \, dz \quad 4$$

$$= 2\pi i \, f(2) - 2\pi i \, f(1) \quad 4$$

(Intformel von Cauchy)

$$= 2\pi i \Big(\underbrace{\cos(4\pi)}_{=1} + \underbrace{\sin(4\pi)}_{=0} - \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \Big)$$

$$= \underline{\underline{4\pi i}} \quad 1$$

Aufgabe 3

- Komplexe Erweiterung: $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z^2-2z+2)}$, $z \in \mathbb{C}$.

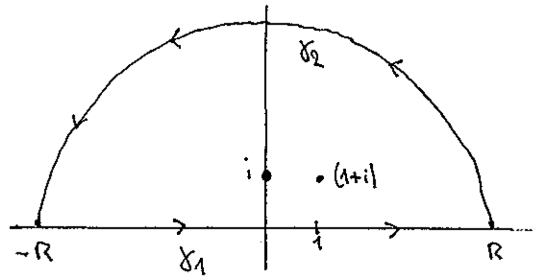
- Polstellen von f: $(z^2+1)(z^2-2z+2)=0 \Leftrightarrow z=i \vee z=-i \vee z=1+i \vee z=1-i$ 2

- Integrationsweg wählen:

  $K = \gamma_1+\gamma_2$ mit

  $\gamma_1(t) = t$, $t\in[-R,R]$

  $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$ 2



- Residuen berechnen:

$$\lim_{z\to i}\left[(z-i)f(z)\right] = \lim_{z\to i}\frac{z}{(z+i)(z-(1+i))(z-(1-i))} = \frac{i}{2i(-1)(2i-1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-1+2i)}\cdot\frac{(-1-2i)}{(-1-2i)} = \frac{\frac{1}{2}(1+2i)}{5} = \frac{1}{10}(1+2i)$$

$$\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\operatorname{Res}_{z=i} f = \frac{1}{10}(1+2i)}}$$ 2

$$\lim_{z\to(1+i)}\left[(z-(1+i))f(z)\right] = \lim_{z\to(1+i)}\frac{z}{(z-i)(z+i)(z-(1-i))} = \frac{(1+i)}{1\cdot(1+2i)2i} = \frac{1}{2i}(1+i)\cdot\frac{(1-2i)}{(1+2^2)}$$

$$= \frac{1}{10i}(1-2i+i+2) = \frac{1}{10}(-i)\cdot(3-i) = \frac{1}{10}(-1-3i) \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\operatorname{Res}_{z=(1+i)} f = \frac{1}{10}\cdot(-1-3i)}}$$ 2

- Grenzübergang $R\to\infty$ untersuchen:

  - $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}\,dx$ 1 2

  - $\left|\int_{\gamma_2} f\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi}\frac{Re^{it}}{(R^2e^{2it}+1)(R^2e^{2it}-2Re^{it}+2)}Rie^{it}\,dt\right| \leq \int_0^{\pi}\frac{R^2}{(R^2-1)(R^2-2R-2)}\,dt \xrightarrow{R\to\infty} 0$

- Residuensatz anwenden:

$$\int_K f\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=i} f + \operatorname{Res}_{z=(1+i)} f\right) \overset{R\to\infty}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}\,dx = 2\pi i\left(\frac{2i}{10}-\frac{3i}{10}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{5}}}$$ 2

A4

Wähle z.B. $f(z) = \frac{1}{z^2}$, Pol 2ter Ordnung in 0

Dann gilt $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$

$$\Rightarrow \int_{|z|=1} f(z)\, dz = 0$$

4