Prof. Dr. Josef Bemelmans
Institut für Mathematik, RWTH Aachen
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de

Telefon: +49(0)241-8094921
Fax: +49(0)241-8092323
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 110/111
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik IV (Bachelor / Vordiplom)
SS 2009 (Wiederholung)
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

---

1. Aufgabe *(10 Punkte)*

Bestimmen Sie die Möbius Transformation $w := f(z)$, die den Kreis

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 2\}$$

so auf den Kreis

$$\{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$$

abbildet, dass $f(0) = 0$ und $f(-1) = 1$ gilt.

2. Aufgabe *(6 Punkte)*

Durch $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \dfrac{z - \sin(z)}{z^3}$ ist eine holomorphe Funktion gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Laurent-Reihe von f um $z_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie die Art der Singularität von f in $z_0 = 0$.

3. Aufgabe *(16 Punkte)*

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}\, dx.$$

4. Aufgabe *(4 Punkte)*

Es seien $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die Singularität der Funktion f in $z = i$ hebbar ist.

A1)

$f(0) = 0$ ⎫ $w_1 = 0$, $z_1 = 0$

$f(-1) = 1$ ⎬ $w_2 = 1$, $z_2 = -1$

Wähle $f(3) = -1$ ⎭ $w_3 = -1$, $z_3 = 3$

Die Gerade durch die Punkte -1 und 3 schneidet den Kreis um ~~0~~ im rechten Winkel. Dann muss auch das Bild unter f den Kreis um 0 im rechten Winkel schneiden.

6 Punkte Formel:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

$$\frac{w}{w+1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{z}{z-3} \cdot \frac{-4}{-1}$$

$$(=) \quad w = -\frac{4z}{2z+6} = \frac{-2z}{z+3}$$

6

~~7~~

Nun gilt $|f(-1)| = 1$, $|f(3)| = 1$

~~2~~

4

Wähle $z_0 = 1+2i$, dann gilt

$$|f(1+2i)| = \left|\frac{-2-4i}{4+2i}\right| = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}} = \underline{\underline{1}}$$

Also bildet f K_1 auf $\partial B_1(0)$ ab.

Aufgabe 2

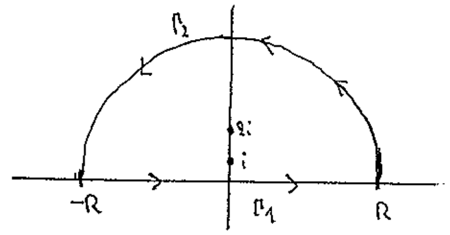
a) $f(z) = \frac{z}{z^3} - \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{1}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2}$ (3)

b) Die Singularität in $z_0 = 0$ ist hebbar. (3)

Aufgabe 3 Zu berechnen: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

- Komplexe Erweiterung: $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$ 2

- Polstellen von f: $\underline{\underline{z=i,\ z=-i,\ z=2i,\ z=-2i}}$ 2



- Integrationsweg wählen:

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ mit $\Gamma_1: \gamma_1(t) = t,\ t \in [-R,R]$ und $\Gamma_2: \gamma_2(t) = Re^{it},\ t \in [0,\pi]$ 1

- Residuen berechnen:

$$\lim_{z\to i}\left[(z-i)f(z)\right] = \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{e^{-1}}{2i\cdot 3} = -i\cdot\frac{e^{-1}}{6} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{Res}_{z=i} f = -i\frac{e^{-1}}{6}}}$$ 2

$$\lim_{z\to 2i}\left[(z-2i)f(z)\right] = \lim_{z\to 2i} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{e^{-2}}{-3\cdot 4i} = i\frac{e^{-2}}{12} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{Res}_{z=2i} f = i\frac{e^{-2}}{12}}}$$ 2

- Grenzübergang $R\to\infty$ untersuchen:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$ 1

$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{((Re^{it})^2+1)((Re^{it})^2+4)}\, iRe^{it}\,dt\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R\,e^{-R\sin(t)}}{|(R^2e^{2it}+1)(R^2e^{2it}+4)|}\,dt$$

für R groß $\leq \int_0^{\pi} \frac{R}{(R^2-1)(R^2-4)}\,dt = \pi\cdot\frac{R}{(R^2-1)(R^2-4)} \longrightarrow 0$ für $R\to\infty$ 3

- Residuensatz anwenden:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=i} f + \operatorname{Res}_{z=2i} f\right) \Rightarrow \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi\left(\frac{e^{-1}}{6} - \frac{e^{-2}}{12}\right)$$

$$\xRightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = 2\pi\left(\frac{e^{-1}}{6} - \frac{e^{-2}}{12}\right)$$ 2

- Es folgt: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \underline{\underline{2\pi\left(\frac{e^{-1}}{6} - \frac{e^{-2}}{12}\right)}}$ 1

Aufgabe 4

Nach dem Identitätssatz gilt $f(z) = g(z)$ in $\mathbb{C} \setminus \{i\}$. Setzen wir $f(i) = g(i)$, dann gilt $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f (= g)$ holomorph. Also ist die Singularität in i hebbar. $\square$

4