RWTH AACHEN
Prof. Dr. Josef Bemelmans
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 1010 | 111 (Hauptgebäude)

Tel.: +49 241 80 94889
Sekr.: +49 241 80 94921
Fax: +49 241 80 92323
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de

B. Sc./Vordiplom — 8. August 2012
SoSe 2012 — Dauer: 90 Minuten

Klausur: Höhere Mathematik IV

Studiengang: Physik

Aufgabe 1 **[9 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie diejenige Möbiustransformation $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, die die Gleichungen

$$\varphi(0) = 2, \quad \varphi(i) = 0, \quad \varphi(-1) = \infty$$

erfüllt.

(b) Bestimmen Sie das Bild der Einheitskreisscheibe $S := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}$ unter φ.

(c) Entscheiden Sie, ob das Bild der Geraden $I := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re(z) = 0\} \cup \{\infty\}$ unter φ ein Kreis oder eine Gerade ist. Begründen Sie ihre Antwort *kurz*.

Aufgabe 2 **[9 Punkte]**

Es bezeichnen $\Re(z_0)$ den Real- und $\Im(z_0)$ den Imaginärteil einer komplexen Zahl z_0. Bestimmen Sie die Menge $L \subset \mathbb{C}$ aller Zahlen $r \in \mathbb{C}$, so dass $f_r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch $f_r(z) = r \cdot \Im(z) + \Re(r \cdot z)$, holomorph ist auf ganz $\mathbb{C}$. Skizzieren Sie L.

Aufgabe 3 **[6 Punkte]**

Betrachten Sie die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$, gegeben durch $f(z) = (e^{z-1} - z)/(z-1)^3$.

(a) Bestimmen Sie die Laurent-Reihe von f um $z_0 = 1$ für $|z-1| > 0$.

(b) Bestimmen Sie die Art der Singularität von f in $z_0 = 1$. Falls eine Polstelle vorliegt, geben Sie deren Ordnung an. Geben Sie außerdem $\operatorname{Res}(f, 1)$ an.

Aufgabe 4 **[12 Punkte]**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{(x^2+1)(x^2-2x+2)} \, \mathrm{d}x \, .$$

Aufgabe 5 **[9 Punkte]**

Finden Sie zu der inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung $\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \Omega x(t) = f(t)$, wobei $\gamma, \Omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind, eine sogenannte Greensche Funktion G mithilfe eines Fourier-Ansatzes.

Hinweise:

- Die aufzufindende Greensche Funktion G erfüllt die Eigenschaft, dass $x(t) := \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f(s) \, \mathrm{d}s$ eine Lösung der oben genannten inhomogenen Differentialgleichung ist.
- Geben Sie G als Ausdruck $G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, t) \, \mathrm{d}\omega$ an, wobei $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist.
- Nehmen Sie an, dass alle zu verwendenden Fourier-Transformierten existieren.

Aufgabe 6 **[9 Punkte]**

Berechnen Sie mithilfe der Laplace-Transformation die Lösung $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ von

$$u''(t) - 2u'(t) + u(t) = -e^{-t}, \qquad t > 0,$$
$$u(0) = 0,$$
$$\int_0^{\infty} e^{-2t} u(t) \, \mathrm{d}t = 1/6 \, .$$

Viel Erfolg!