RWTH AACHEN
Prof. Dr. Josef Bemelmans
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 1010 | 111 (Hauptgebäude)

Tel.: +49 241 80 94889
Sekr.: +49 241 80 94921
Fax: +49 241 80 92323
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de

B. Sc./Vordiplom
SoSe 2012

Probeklausur: HM IV

Juni/Juli 2012
Dauer: 60/90 Min.

Aufgaben 1-4: ET&Phy., Aufgaben 5-6: Phy.

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie diejenige Möbiustransformation $\varphi: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, die die Gleichungen

$$\varphi(0) = \infty, \quad \varphi(-i/2) = 0, \quad \varphi(1) = 1 - 2i$$

erfüllt. Bestimmen Sie zudem die Menge der Fixpunkte von φ.

(b) Betrachten Sie nun die Möbiustransformation $\psi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, gegeben durch $\psi(z) = (2z)/(iz-1)$. Bestimmen Sie das Bild der Halbebene $H := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\} \cup \{\infty\}$ unter ψ.

Lösung

(a) Mit der 6-Punkte-Formel erhält man

$$\begin{aligned} \frac{w-(1-2i)}{w-0} \cdot 1 &= \frac{z-1}{z-(-i/2)} \cdot \frac{0-(-i/2)}{0-1} \\ \Leftrightarrow \quad w-(1-2i) &= \frac{z-1}{z+i/2} \cdot (-i/2) \cdot w \\ \Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{z-1}{2iz-1}\right) w &= 1-2i, \end{aligned}$$

also

$$w = (1-2i) \cdot \frac{2iz-1}{(2iz-1)-(z-1)} = (1-2i) \cdot \frac{2iz-1}{(2i-1)z} = \frac{-2iz+1}{z}.$$

Weiter gilt $\varphi(z) = z \Leftrightarrow -2iz+1 = z^2$, die Fixpunkte von φ sind also die Wurzeln des Polynoms

$$z^2 + 2iz - 1 = (z+i)^2,$$

somit ist $z = -i$ der einzige Fixpunkt.

(b) Es gilt

$$\psi(-1) = -i+1,\ \psi(0) = 0,\ \psi(1) = -i-1,$$

somit wird die reelle Achse auf den Kreis $\partial B_1(-i)$ abgebildet.
Mit $\psi(i) = -i$ gilt $\psi(H) = \overline{B_1(-i)}$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass es keine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ geben kann, die sowohl
(A) $f(z) \neq 0 \,\forall\, z \in \mathbb{C}$ als auch
(B) $|f(z)| \geq |\cosh(z)| \,\forall\, z \in \mathbb{C}$
erfüllt.

Lösung
Angenommen, es gäbe eine Funktion f, die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist und sowohl **(A)** als auch **(B)** erfüllt.
Dann betrachte die Funktion g, definiert durch

$$g(z) = \frac{\cosh(z)}{f(z)}\,.$$

Da f nach Voraussetzung **(A)** nullstellenfrei ist, ist g holomorph.
Weiterhin ist $|g(z)| \leq 1 \,\forall\, z \in \mathbb{C}$ nach Voraussetzung **(B)**.
Damit ist der Satz von Liouville anwendbar und g ist konstant.
M. a. W. ist

$$g(z) = c \,\forall\, z \in \mathbb{C} \tag{$*$}$$

für ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| \leq 1$.
$c \neq 0$, da sonst $\cosh(z) = 0 \,\forall\, z \in \mathbb{C}$ gelten müsste; es ist aber z. B. $\cosh(0) = 1$.
Damit kann man $(*)$ umformen und erhält

$$f(z) = \frac{\cosh(z)}{c} \,\forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Berechne $f(i \cdot \pi/2) = 0$ und erhalte einen Widerspruch zur Nullstellenfreiheit von f.
Damit ist gezeigt, dass eine holomorphe Funktion f nicht gleichzeitig **(A)** und **(B)** erfüllen kann.

Zusätzliche Überlegung: Es gibt nactürlich Funktionen, die sowohl **(A)** als auch **(B)** erfüllen (beispielsweise $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch $h(z) = |\cosh(z)| + 1$); solche Funktionen können aber nicht holomorph sein, da sonst ein Widerspruch zur Gültigkeit des Satzes von Liouville entstehen würde.

Aufgabe 3

(a) Gegeben sei die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, gegeben durch $f(z) = (z + z^3) \cdot \sin(1/z)$. Bestimmen Sie die Laurent-Reihe von f um $z_0 = 0$ für $|z| > 0$ sowie $\operatorname{Res}(f, 0)$. Bestimmen Sie außerdem die Art der Singularität von f in $z_0 = 0$; im Falle einer Polstelle geben Sie ihre Ordnung an.

(b) Bestimmen Sie die Laurent-Reihe der holomorphen Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$, gegeben durch $g(z) = \sin(z)/(1 - z^2)$, in einer Umgebung von $z_0 = 0$ und geben Sie den Konvergenzradius an.

Lösung

(a) Es ist

$$
\begin{aligned}
\left(z + z^3\right) \sin\left(\frac{1}{z}\right) &= \left(1 + z^2\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1} z \\
&= \left(1 + z^2\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k}\right) + z^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k}\right) \\
&= \left(\sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^{-k}}{(-2k+1)!} z^{2k}\right) + z^2 + \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{-k}}{(-2k+1)!} z^{2k+2}\right) \\
&= \left(\sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^{-k}}{(-2k+1)!} z^{2k}\right) + z^2 + \left(\sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^{-k-1}}{(-2(k-1)+1)!} z^{2(k-1)+2}\right) \\
&= z^2 + \sum_{k=-\infty}^{0} \left(\frac{(-1)^k}{(-2k+1)!} + \frac{(-1)^{k+1}}{(-2k+3)!}\right) z^{2k}.
\end{aligned}
$$

Es liegt eine wesentliche Singularität vor, da unendlich viele Koeffizienten des Hauptteils von Null verschieden sind.
Das Residuum ist abzulesen als Koeffizient von z^{-1} und damit 0.

(b) Der Konvergenzradius ist 1, da (einfache) Pole in 1 und -1 vorliegen. Für $|z| < 1$ gilt weiter

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1 - z^2} \sin(z) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} z^{2k-2j} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} z^{2j+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\right) z^{2k+1}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie das Integral

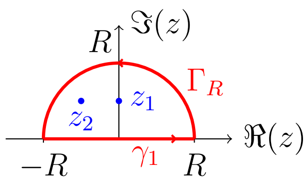
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)\,(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung

Da das uneigentliche Integral existiert, gilt $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{x+1}{(x^2+1)\,(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)\,(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x.$

Setze den Integranden auf $\mathbb{C}$ fort, betrachte also $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, definiert durch $f(z)=\dfrac{z+1}{(z^2+1)\,(z^2+2z+2)}$.
Die Funktion f hat Singularitäten in den Nullstellen des Nenners, also in $z_1=i,\ z_2=-1+i,\ z_3=-i$ und $z_4=-1-i$. Also ist insbesondere

$$f(z)=\frac{z+1}{(z+1-i)(z+1+i)(z-i)(z+i)}.$$



Betrachte nun den Weg Γ, definiert durch $\Gamma := \Gamma_R \cup [-R,R]$. Dabei bezeichne Γ_R die obere Hälfte des positiv orientierten Halbkreises um den Mittelpunkt Null mit Radius R und $[-R,R]$ die Strecke von $-R$ bis R. Beachte: R ist so groß zu wählen, dass die Singularitäten mit positivem Imaginärteil (d.h. z_1 und z_2) innerhalb des von Γ berandeten Gebiets liegen. Hier genügt $R>\sqrt{2}$.
Die Singularitäten z_3 und z_4 liegen nicht in dem von Γ berandeten Bereich; der Residuensatz liefert daher

$$2\pi i\,(\operatorname{Res}(f,z_1)+\operatorname{Res}(f,z_2)) = \oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-R,R]} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Die linke Seite ist unabhängig von R. Dann liefert der Grenzübergang $R\to\infty$ einerseits

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,\mathrm{d}z \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)\,(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x \quad \text{und andererseits} \quad \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \longrightarrow 0,$$

da man mit der Parametrisierung $\gamma:[0,\pi]\to\mathbb{C}$, definiert durch $\gamma(t)=R\cdot e^{it}$, die Abschätzung

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_0^{\pi} \left|\frac{(1+Re^{it})\,iRe^{it}}{(1+R^2e^{2it})\,(R^2e^{2it}+2Re^{it}+2)}\right|\mathrm{d}t \le \int_0^{\pi} \frac{R+R^2}{R^4\left|e^{2it}+\frac{1}{R^2}\right|\cdot\left|e^{2it}+2e^{it}\frac{1}{R}+\frac{2}{R^2}\right|}\,\mathrm{d}t$$

$$\le \frac{2}{R^2}\int_0^{\pi}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{R^2}\right)\left(1-\frac{2}{R}-\frac{2}{R^2}\right)}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{R^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{R^2}\right)\left(1-\frac{2}{R}-\frac{2}{R^2}\right)} \longrightarrow 0$$

hat für $R\to\infty$.
Berechne noch die Residuen. Es handelt sich jeweils um Pole der Ordnung 1. Also hat man

$\operatorname{Res}(f,i) = \lim\limits_{z\to i} f(z)(z-i) = \lim\limits_{z\to i}\dfrac{1+z}{(z+i)\,(z^2+2z+2)} = \dfrac{1+i}{2i}\,\dfrac{1}{1+2i} = -\dfrac{1}{10}(1+3i)$ und

$\operatorname{Res}(f,-1+i) = \lim\limits_{z\to -1+i} f(z)(z+1-i) = \lim\limits_{z\to -1+i}\dfrac{1+z}{(z^2+1)\,(z+1+i)} = \dfrac{1}{10}(1+2i).$

Damit erhält man schließlich $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+1}{(x^2+1)\,(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\left(-\frac{1}{10}(1+3i)+\frac{1}{10}(1+2i)\right) = \frac{\pi}{5}.$

Aufgabe 5

Geben Sie mithilfe eines Fourier-Ansatzes die Lösung u der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) + u(t) = e^{-t^2}$$

als Integralausdruck an.

Lösung

Die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{u}(t)+u(t) = f(t)$ wird nach Anwendung der Fourier-Transformation zu $(i\omega + 1)\,\widehat{u}(\omega) = \widehat{f}(\omega)$. Folglich gilt $\widehat{u}(\omega) = \widehat{f}(\omega)/(1+i\omega)$.
Dann erhält man mit dem Faltungssatz $u(t) = (f * g)\,(t)$, für eine Funktion g, die $\hat{g}(\omega) = 1/(1+i\omega)$ erfüllt. Wir bestimmen also zunächst mittels inverser Fourier-Transformation diese Funktion g.

Definitionsgemäß ist $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega t)}{1+i\omega}\, d\omega$.

Wir berechnen dieses Integral mittels Residuenkalkül und stellen zunächst fest, dass die Fortsetzung des Integranden auf die komplexe Ebene holomorph ist auf $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ und in i einen Pol erster Ordnung aufweist. Desweiteren ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\exp(i\omega t)}{1+i\omega}, i\right) = \lim_{\omega\to i}(\omega - i)\cdot\frac{\exp(i\omega t)}{1+i\omega} = -i\cdot\exp(-t).$$

Nun ist, für $t > 0$, mit dem Residuensatz

$$\sqrt{2\pi}\cdot i\cdot[-i\cdot\exp(-t)] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3} \frac{\exp(i\omega t)}{1+i\omega}\, d\omega \xrightarrow{r_1,r_2,s\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega t)}{1+i\omega}\, d\omega\,,$$

wobei die Definition der Kurven (Strecken) $\Gamma_i,\ i = 1,2,3$, der Zeichnung zu entnehmen sind. Mit Standardabschätzungen sieht man, dass die Integrale über $\Gamma_i,\ i = 1,2,3$, für festes t keinen Beitrag leisten:

$$\left|\int_{\Gamma_2} \frac{\exp(i\omega t)}{1+i\omega}\, d\omega\right| \le (r_1 + r_2)\cdot\frac{1}{s}\cdot\exp(-st), \qquad \left|\int_{\Gamma_1} \frac{\exp(i\omega t)}{1+i\omega}\, d\omega\right| \le \frac{1}{r_2}\cdot\int_0^s \exp(-\omega t)d\omega \le \frac{1}{r_2}\cdot\frac{1}{t}, \qquad (*)$$

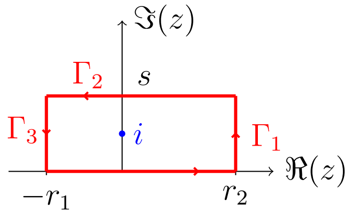
analog Integral über Γ_3. Wählt man s nun immer größer als (r_1+r_2), gilt für die Summe der drei Integrale

$$\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3} \frac{\exp(i\omega t)}{1+i\omega}\, d\omega \le \frac{r_1+r_2}{s}\cdot\exp(-st) + \frac{1}{r_2}\cdot\frac{1}{t} + \frac{1}{r_1}\cdot\frac{1}{t} \le \exp(-st) + \frac{1}{r_2}\cdot\frac{1}{t} + \frac{1}{r_1}\cdot\frac{1}{t} \xrightarrow{r_1,r_2\to\infty} 0.$$

Also ist für $t > 0$ $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega t)}{1+i\omega}\, d\omega = \sqrt{2\pi}\exp(-t)$. Für $t < 0$ wählt man, um die Gültigkeit von Abschätzungen wie in $(*)$ zu wahren, für das Residuenkalkül einen Weg in der unteren Halbebene und erhält $g(t) = 0\;\forall t < 0$, da das Innengebiet des Integrationswegs dann keine Singularität enthält.

Insgesamt ist also g definiert durch $g(t) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\exp(-t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Nun gilt $u(t) = (g * f)\,(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \sqrt{2\pi} e^{-(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-\left(t-\tau+\tau^2\right)}\, d\tau.$



Aufgabe 6

Berechnen Sie mithilfe der Laplace-Transformation für $a > 0$ die Lösung $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ von

$$\begin{aligned} u''(t) + au'(t) &= 0, \qquad\qquad t > 0, \\ u(0) &= 0, \\ \int_0^\infty e^{-t} u(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{a}{1+a}\,. \end{aligned}$$

Lösung

Es sei

$$L(u)(s) := \int_0^\infty e^{-st} u(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dann gelten

$$L(u'') = s^2 L(u) - su(0) - u'(0) = s^2 L(u) - u'(0)$$

und

$$L(au') = saL(u) - au(0) = saL(u)\,.$$

Damit erhält man

$$(s^2 + sa)L(u) - u'(0) = 0\,.$$

Es gilt $L(u)(1) = \int_0^\infty e^{-t} u(t)\,\mathrm{d}t = a/(1+a)$ („Yeressian-Trick“), und damit folgt

$$\begin{aligned} & (1+a)L(u)(1) - u'(0) = 0. \\ \Rightarrow \qquad & u'(0) = a. \\ \Rightarrow \qquad & L(u) = a/[s \cdot (s+a)] \overset{\text{PBZ}}{=\!=\!=} 1/s - 1/(s+a) = 0!/(s-0)^1 - 0!/(s-(-a))^1. \\ \Rightarrow \qquad & u(t) = 1 - e^{-at}. \end{aligned}$$