Prof. Dr. Josef Bemelmans
Institut für Mathematik, RWTH Aachen
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de

Telefon: +49(0)241-8094921
Fax: +49(0)241-8092323
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 110/111
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik IV (Bachelor / Vordiplom)
WS 2009/2010
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

---

1. Aufgabe *(10 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Möbius-Transformation

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d},$$

die die Punkte $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 2$ auf die Punkte $w_1 = -1$, $w_2 = i$, $w_3 = 1$ abbildet.

b) Bestimmen Sie das Bild von $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ unter der Abbildung f.

2. Aufgabe *(10 Punkte)*

Bestimmen Sie alle Koeffizienten der Laurent-Reihe von

$$f(z) := \frac{1}{(z^2+1)(z-1)}$$

in einer Umgebung von $z_0 = 1$.

3. Aufgabe *(10 Punkte)*

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\sin(\phi)}\,\mathrm{d}\phi.$$

4. Aufgabe *(6 Punkte)*

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass für ein hinreichend kleines $r > 0$ gilt

$$\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{f(z)-f(z_0)}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}.$$

Hinweis: Residuensatz.

Aufgabe 1:

a) Nach der 6-Punkte-Formel gilt

$$\frac{(w-(-1))}{(w-1)}\cdot\frac{(i-1)}{(i+1)} = \frac{(z+1)}{(z-2)}\cdot\frac{(-2)}{1}$$

$$\Updownarrow$$

$$w = \frac{-(2i+1)z-(2i-2)}{(1-2i)z+(-2i-2)}$$

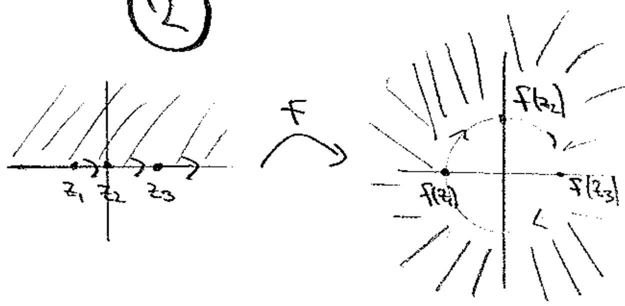
Also ist $\underline{\underline{a=-(2i+1),\ b=-(2i-2),\ c=(1-2i),\ d=(-2i-2)}}$. 7

b) • Wähle 3 Punkte auf $\partial\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z)>0\}$: $z_1=-1$, $z_2=0$, $z_3=2$

• Es gilt $f(z_1)=-1$, $f(z_2)=i$, $f(z_3)=1$

• Die Punkte $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ liegen auf $\partial B_1(0)$. Es folgt

$$\underline{\underline{f(\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z)>0\}) = \mathbb{C}\setminus\overline{B_1(0)}}}$$ 2



da f konform. 1

Aufgabe 2

- $$\frac{1}{(z^2+1)(z-1)} = \frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{((z-1+1)^2+1)} \overset{(2)}{=} \frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{((z-1)^2+2(z-1)+2)}$$ (3)

$$= \frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{i}{2}\left(\frac{1}{(1+i)+(z-1)} - \frac{1}{(1-i)+(z-1)} \right)$$

$$= \frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{i}{2}\left(\frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{z-1}{1+i}\right)} - \frac{1}{(1-i)} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{z-1}{1-i}\right)} \right)$$

$$= \frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{i}{2}\left(\frac{1}{(1+i)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(1+i)^n} (z-1)^n - \frac{1}{(1-i)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(1-i)^n} (z-1)^n \right)$$

(3)

- Koeffizienten der Laurent-Reihe:

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k < -1 \\ \frac{i}{2}\left(\frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{(1+i)^{k+1}} - \frac{1}{(1-i)} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{(1-i)^{k+1}} \right) & \text{für } k \geq -1 \end{cases}$$ (2)

Aufgabe 3

- $I := \int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\sin\varphi}\, d\varphi$

- Es gilt $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\frac{1}{i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})} \cdot \frac{ie^{i\varphi}}{ie^{i\varphi}}\, d\varphi = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{3iz+z^2-1}\, dz := \int_{\partial B_1(0)} g(z)\, dz$ 4

- Polstellen von g: $z_1 := -\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})i$ und $z_2 := -\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})i$ 2

- Residuen von g in den Polstellen innerhalb von $\partial B_1(0)$: (d.h. in z_2):

$$\lim_{z\to z_2} \left[g(z)(z-z_2) \right] = \frac{1}{(z_2-z_1)} = \frac{1}{\sqrt{5}i} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Res}_{z=z_2} g = \frac{1}{\sqrt{5}i}$$ 3

- Nach dem Residuensatz gilt:

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_2} g = \underline{\underline{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}}}$$ 1

Aufgabe 4

- Nach dem Identitätssatz ex. $r>0$ s.d. $f(z) \neq f(z_0)$ in $B_r(z_0)$. 1

- Die Funktion $g(z) := \dfrac{1}{f(z)-f(z_0)}$ ist somit holomorph in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$,

  und da $\lim\limits_{z \to z_0} \left[(z-z_0) g(z) \right] = \dfrac{1}{f'(z_0)} \neq 0$ ist $\operatorname{Res}\limits_{z=z_0} g = \dfrac{1}{f'(z_0)}$. 4

- Es folgt nach dem Residuensatz, dass:

$$\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{f(z)-f(z_0)}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} g = \frac{2\pi i}{f'(z_0)} \quad 1 \qquad \square$$