RWTH AACHEN

Prof. Dr. Josef Bemelmans
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 1010 | 111 (Hauptgebäude)

Tel.: +49 241 80 94889
Sekr.: +49 241 80 94921
Fax: +49 241 80 92323
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de

B. Sc.
WS 2012/13

Klausur: Höhere Mathematik IV

8. Februar 2013
Dauer: 90 Minuten

Studiengang: Physik

Aufgabe 1 **[9 Punkte]**

Die Funktion $\varphi\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ sei gegeben durch

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{-iz+1}.$$

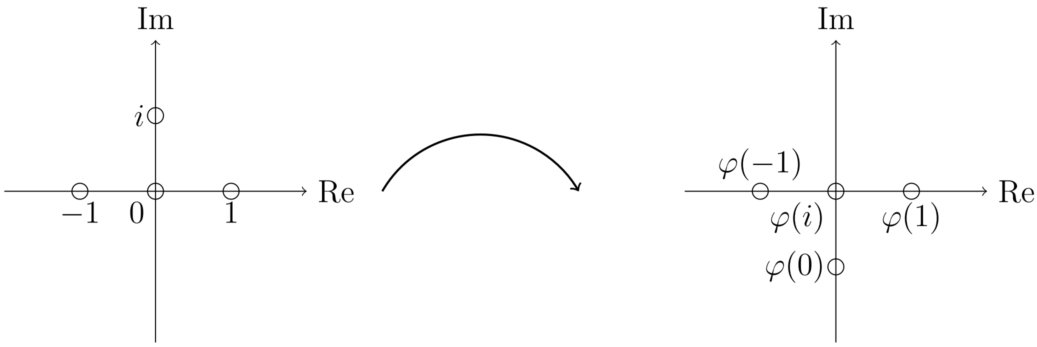
(a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Möbiustransformation handelt.
(b) Bestimmen Sie die Fixpunkte von φ.
(c) Berechnen Sie das Bild der Mengen S_1 und S_2 unter φ, wobei
$S_1 := \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\}$ und
$S_2 := \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im}(z) \geq 0\} \cup \{\infty\}$.

Lösung

(a) $1, -i \in \mathbb{C}$ und $1 \cdot 1 - (-i) \cdot (-i) = 2 \neq 0$ **[1]**

(b)
$$\begin{aligned} \varphi(z) &= z \\ \Leftrightarrow \frac{z-i}{-iz+1} &= z \\ \Leftrightarrow z - i &= -iz^2 + z \\ \Leftrightarrow iz^2 - i &= 0 \\ \Leftrightarrow z^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= \pm 1. \end{aligned}$$
[2]

(c) Berechne die Bilder zweier zusätzlicher Punkte: $\varphi(i) = 0, \varphi(0) = -i$. **[1]**



Unter Möbiustransformationen werden Kreise und Geraden jeweils auf Kreise oder Geraden abgebildet, d.h. $\varphi(\partial S_i)$, $i = 1, 2$, ist entweder ein Kreis oder eine Gerade. **[1]**
Es gilt: $\{-1, i, 1\} \subset \partial S_1$, die Bilder $-1, 0, 1$ liegen auf einer Geraden $\Rightarrow \varphi(\partial S_1) = \{\operatorname{Im}(z) = 0\}$. **[1]**
$0 \in \mathring{S}_1 \Rightarrow \varphi(S_1) = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im}(z) \leq 0\} \cup \{\infty\}$.
Alternativ: Wenn man von 1 über i nach -1 läuft, liegt das Gebiet links, also liegt es auch links, wenn man von 1 über 0 nach -1 läuft. **[1]**

Außerdem: $\{-1, 0, 1\} \subset \partial S_2$, die Bilder $-1, -i, 1$ liegen auf einem Kreis. $\Rightarrow \varphi(\partial S_2) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$. **[1]**
$i \in \mathring{S}_2 \Rightarrow \varphi(S_2) = S_1$. **[1]**

Aufgabe 2 **[9 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gegeben ist durch

$$f(x,y) = a^2b(1-i)x - b^3y + (b+3)^2by - 6b^2y - \frac{b^3}{i} \cdot y$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge L alle Paare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, für die f analytisch ist.

Lösung

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn f die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt. Genauer: Identifiziert man in üblicher Façon $f(x,y)$ mit $u(x,y) + i \cdot v(x,y)$, so ist f genau dann holomorph, wenn

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) \text{ und} \\ \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial x} v(x,y) \end{cases}$$

erfüllt sind. **[2]**

Sei nun konkret

$$f(x,y) = a^2b(1-i)x - b^3y + (b+3)^2by - 6b^2y - \frac{b^3}{i} \cdot y.$$

Dann erhält man

$$\begin{cases} u(x,y) &= +a^2bx + 9by \qquad \text{sowie} \\ v(x,y) &= -a^2bx + b^3y \end{cases}$$ **[1]** **[1]**

und damit, durch Einsetzen in die C-R-Dgln., das Gleichungssystem

$$\begin{cases} & a^2b = b^3 \\ \wedge & a^2b = 9b. \end{cases}$$ **[1]** **[1]**

Das System ist für $b = 0$ und $a \in \mathbb{R}$ trivialerweise erfüllt. **[1]**

Sei nun $b \neq 0$. Dann reduziert man das System mittels Division durch b auf

$$\begin{cases} & a^2 = b^2 \\ \wedge & a^2 = 9. \end{cases}$$

Dieses System hat die Lösungen $(3,3)$, $(-3,3)$, $(3,-3)$ und $(-3,-3)$. **[1]**

Insgesamt ist also $L = \{(3,3); (-3,3); (3,-3); (-3,-3)\} \cup \{(a,0) \,:\, a \in \mathbb{R}\}$. **[1]**

Aufgabe 3 **[6 Punkte]**

Geben sie die Koeffizienten a_n der Laurent-Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ von f, gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ in $z_0 = 0$ an.

Lösung

Zunächst bemerken wir, dass

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}. \qquad \textbf{[1]}$$

Da $|z| < 2$, können wir folgendermaßen entwickeln

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} z^n. \qquad \textbf{[2]}$$

Da $1 < |z|$, erhalten wir

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} -z^n. \qquad \textbf{[2]}$$

Damit sind die Koeffizienten der Laurent-Reihe

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{2^{n+1}}, & n \in \mathbb{N}_0, \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

Aufgabe 4 **[12 Punkte]**

Berechnen Sie mithilfe des Residuensatzes das Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)(x^3-x^2+x-1)}\,\mathrm{d}x\,.$

Lösung

Da das uneigentliche Integral existiert, gilt

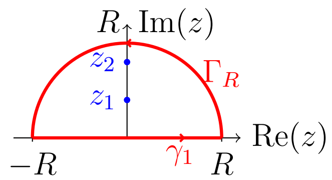
$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{x-1}{(x^2+4)(x^3-x^2+x-1)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)(x^3-x^2+x-1)}\,\mathrm{d}x.$$

Setze den Integranden auf $\mathbb{C}$ fort, betrachte also $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{z-1}{(z^2+4)(z^3-z^2+z-1)}\,.$ **[1]**

Die Funktion f hat eine hebbare Singularität in $z_0 = 1$, da diese Nullstelle im Zähler- und Nennerpolynom vorkommt. Die Funktion f hat Singularitäten in den Nullstellen des Nenners, also in $z_1 = i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -i$ und $z_4 = -2i$. Also ist insbesondere

$$f(z) = \frac{z-1}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)(z-1)} = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}. \qquad \textbf{[2]}$$

Betrachte nun den Weg Γ, definiert durch $\Gamma := \Gamma_R \cup [-R,R]$. Dabei bezeichne Γ_R die obere Hälfte des positiv orientierten Halbkreises um den Mittelpunkt Null mit Radius R und $[-R,R]$ die Strecke von $-R$ bis R. Beachte: R ist so groß zu wählen, dass die Singularitäten mit positivem Imaginärteil (d.h. z_1 und z_2) innerhalb des von Γ berandeten Gebiets liegen. Hier genügt $R > 2$.



[1]

Die Singularitäten z_3 und z_4 liegen nicht in dem von Γ berandeten Bereich; der Residuensatz liefert daher

$$2\pi i\,(\mathrm{Res}(f,z_1)+\mathrm{Res}(f,z_2)) = \oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-R,R]} f(z)\,\mathrm{d}z. \qquad \textbf{[1]}$$

Die linke Seite ist unabhängig von R. Dann liefert der Grenzübergang $R\to\infty$ einerseits

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,\mathrm{d}z \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)(x^3-x^2+x-1)}\,\mathrm{d}x \quad \text{und andererseits} \quad \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \longrightarrow 0, \qquad \textbf{[1]}$$

da man mit der Parametrisierung $\gamma:[0,\pi]\to\mathbb{C}$, definiert durch $\gamma(t) = R\cdot e^{it}$, die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_0^\pi \left|\frac{\cancel{(Re^{it}-1)}iRe^{it}}{(R^2e^{2it}+1)\,(R^2e^{2it}+4)\,\cancel{(Re^{it}-1)}}\right|\mathrm{d}t \le \int_0^\pi \frac{R}{R^4\left|e^{2it}+\frac{1}{R^2}\right|\cdot\left|e^{2it}+\frac{4}{R^2}\right|}\,\mathrm{d}t\\ &\le \frac{1}{R^3}\int_0^\pi \frac{1}{\left(1-\frac{1}{R^2}\right)\left(1-\frac{4}{R^2}\right)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{R^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{R^2}\right)\left(1-\frac{4}{R^2}\right)} \longrightarrow 0,\ R\to\infty,\ \text{hat.}\end{aligned} \qquad \textbf{[3]}$$

Berechne noch die Residuen. Es handelt sich jeweils um Pole der Ordnung 1. Also hat man

$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} f(z)(z-i) = \lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)\,(z^2+4)} = \frac{1}{(i+i)(-1+4)} = \frac{1}{6i} \text{ und} \qquad \textbf{[1]}$$

$$\mathrm{Res}(f,2i) = \lim_{z\to 2i} f(z)(z-2i) = \lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z^2+1)\,(z+2i)} = \frac{1}{(-4+1)(2i+2i)} = -\frac{1}{12i}. \qquad \textbf{[1]}$$

Damit erhält man schließlich $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)(x^3-x^2+x-1)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\left(-\frac{1}{12i}+\frac{1}{6i}\right) = \frac{\pi}{6}.$ **[1]**

Aufgabe 5 **[9 Punkte]**

Finden Sie zu der inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = f(t)$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist, eine sogenannte Greensche Funktion G mithilfe eines Fourier-Ansatzes.

Hinweise:

- Die aufzufindende Greensche Funktion G erfüllt die Eigenschaft, dass $x(t) := \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s$ eine Lösung der oben genannten inhomogenen Differentialgleichung ist.
- Geben Sie G als Ausdruck $G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega,t)\,\mathrm{d}\omega$ an, wobei $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist.
- Nehmen Sie an, dass alle zu verwendenden Fourier-Transformierten existieren.

Lösung

Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = f(t)$$

wird unter Fourier-Transformation zu

$$\left(-\omega^2 + i2\omega + 1\right)\widehat{x}(\omega) = \widehat{f}(\omega). \qquad \textbf{[2]}$$

Folglich gilt

$$\widehat{x}(\omega) = \frac{\widehat{f}(\omega)}{(-\omega^2 + i2\omega + 1)} = \frac{1}{(-\omega^2 + i2\omega + 1)} \cdot \widehat{f}(\omega). \qquad \textbf{[1]}$$

Setze nun $\sqrt{2\pi}\widehat{G}(\omega) := 1/(-\omega^2 + i2\omega + 1)$. **[2]**

Nach Faltungssatz gilt dann

$$x(t) = (\sqrt{2\pi}G * f)(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s. \qquad \textbf{[2]}$$

Somit haben wir

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(-\omega^2 + i2\omega + 1)} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \quad \text{bzw.} \quad g(\omega,t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(-\omega^2 + i2\omega + 1)} e^{i\omega t}. \qquad \textbf{[2]}$$

Anmerkung: Die obige Differentialgleichung modelliert eine gedämpfte harmonische Schwingung.

Aufgabe 6 **[9 Punkte]**

Berechnen Sie mithilfe der Laplace-Transformation das folgende Anfangswertproblem

$$u''(t) - u(t) = 6e^{2t}, \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = 6.$$

Lösung

Es ist $U := \mathcal{L}(u)$, dann gilt

$$\mathcal{L}(u'') = s^2 U - su(0) - u'(0).$$ **[1]**

Damit erhält man die transformierte Gleichung

$$(s^2 - 1)U - 2s - 6 = \mathcal{L}(6e^{2t}) = \frac{6}{s-2}\,.$$ **[3]**

Hieraus ergibt sich

$$U(s) = \frac{2s^2 + 2s - 6}{(s-2)(s^2-1)}\,.$$ **[1]**

Parzialbruchzerlegung:

$$U(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1}$$

mit $A = 2$, $B = -1$, $C = 1$, d.h. **[2]**

$$U(s) = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}\,,$$

und daraus folgt

$$u(t) = 2e^{2t} - e^{-t} + e^t.$$ **[2]**