Aufgabe 1: (12 Punkte)

Max und Moritz spielen folgendes Spiel: Eine faire Münze wird 3000 mal geworfen. Sie vereinbaren, dass Max gewinnt, falls öfter als 1700 mal Wappen oben liegt. Max hat noch eine gezinkte Münze, die auf beiden Seiten Wappen zeigt. Es gelingt ihm, diese 500 mal während des Spiels einzusetzen. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, dass Max gewinnt.

Auszug aus einer Tabelle zur Standardnormalverteilung:

Die fettgedruckten Überschriften sind Ausprägungen einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen. Die Zahlen mit vier Nachkommastellen in der Tabelle stellen die zugehörigen Verteilungswerte dar. So entspricht der grau unterlegte Eintrag (Z standardnormalverteilt):

$$P(Z \leq 0.51) = 0.6950.$$

	...0	**...1**	**...2**	**...3**	**...4**	**...5**	**...6**	**...7**	**...8**	**...9**
0.0...	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.5...	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
1.0...	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.5...	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
2.0...	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.5...	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952

Lösung:

Max hat schon 500 mal Wappen sicher, benötigt also aus den restlichen 2500 Spielen noch mehr als 1200 mal Wappen.

Variante 1:
Sei W_i : gleichverteilte Zufallsvariable auf $\{0, 1\}$
($W_i = 1$ für Wappen, $i = 1, \ldots, 2500$)

$\rightarrow$ Erwartungswert von W_i: $\mu_W := \mu_{W_i} = \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Varianz von W_i: $\sigma_W^2 := \sigma_{W_i}^2 = \frac{1}{4}$

Weiter sei $S := \sum W_i$ die Anzahl der Wappen und

$$S^* := \frac{S - 2500 \cdot \mu_W}{\sqrt{2500}\sigma_W}$$

die standardisierte Zufallsvariable

Variante 2:
Sei S : binomialverteilte Zufallsvariable
($N = 2500$, $p = q = \frac{1}{2}$, Anzahl Wappen)

$\rightarrow$ Erwartungswert von S: $\mu_S = 1250$

$\rightarrow$ Varianz von S: $\sigma_S^2 = 625$

(2 Punkte)

Weiter Sei

$$S^* := \frac{S - \mu_S}{\sigma_S}$$

die standardisierte Zufallsvariable

(1 Punkte)

Gesucht ist:

$$P(S > 1200)$$

(1 Punkte)

Variante 1:

$$P(S > 1200) = P\left(S^* > \frac{1200 - 2500 \cdot \mu_W}{\sqrt{2500}\sigma_W}\right) = P(S^* > -2)$$

Variante 2:

$$P(S > 1200) = P\left(S^* > \frac{1200 - \mu_S}{\sigma_S}\right) = P(S^* > -2)$$

(1 Punkte)

$$\begin{aligned} &= 1 - P(S^* > 2) \\ &= P(S^* \leq 2) \\ &\overset{\text{ZGWS}}{\approx} \Phi(2) \\ &\overset{\text{tabelle}}{\approx} 0,9772 \end{aligned}$$

(4 Punkte)
(1 pro Zeile)

Musterlsg. Aufgabe 2 (9 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ($G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet) die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** löst. Leiten Sie die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen unter alleiniger Verwendung der Definition von **holomorphen Funktionen** her.

Beweis: Da f holomorph in G ist, existiert der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} := f'(z_0) \qquad \forall z_0 \in G$$

(1)

Betrachte

a) $z = z_0 + h$ $h \in \mathbb{R}$, $h \to 0$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{z_0 + h - z_0} = \frac{1}{h}\left[(u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))\right]$$
$$\overset{h \to 0}{\to} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

(2)

b) $z = z_0 + ih$, $h \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{z_0 + ih - z_0} = \frac{1}{ih}\left[(u(x_0, y_0 + h) + iv(x_0, y_0 + h)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))\right]$$
$$\overset{h \to 0}{\to} = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

(2)

Da f holomorph ist, müssen beide Grenzwerte gleich sein. **(2)**

Es gilt also

$$\Leftrightarrow u_x(x, y) + iv_x(x, y) = -iu_y(x, y) + v_y(x, y)$$

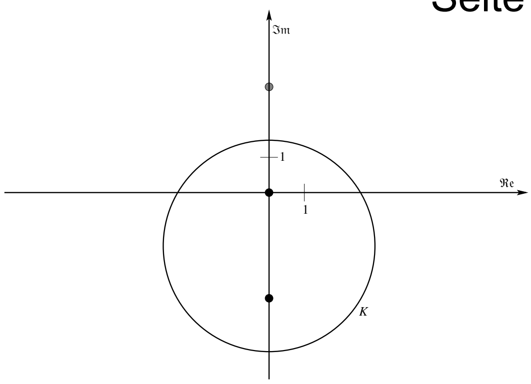
(1)

Daraus folgen die CR-DGL

$$u_x(x, y) = v_y(x, y)$$
$$u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

(1)

Aufgabe 3: (12 Punkte)



Man berechne für die Funktion f, gegeben durch

$$f(z) := z^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{z-3i}\right) + \frac{z-\sinh(z)}{z^3} + \frac{z+2i}{(z+3i)^3},$$

das Kurvenintegral $\oint_\Gamma f(z)\,dz$

längs der Kurve Γ, die parametrisiert wird durch

$$\gamma : [0,2\pi) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \gamma(\varphi) := 2 \cdot \exp(i\varphi) - \frac{3}{2}i.$$

Lösung:

Zur Vereinfachung der Notation definieren wir zunächst die Funktionen f_1, f_2 und f_3 durch

$$f_1(z) := z^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{z-3i}\right), \qquad f_2(z) := \frac{z-\sinh(z)}{z^3} \qquad \text{und} \qquad f_3(z) := \frac{z+2i}{(z+3i)^3}.$$

Zur Berechnung des Kurvenintegrals verwenden wir den Residuensatz 12.8.3.

Im vorliegenden Fall ist $\Gamma \subset G = \{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{3}{2}i| < 3\} \subset \mathbb{C}$ *eine einfach geschlossene, positiv orientierte, reguläre Kurve, so dass* $\{z_1 = 0, z_2 = -3i\} \subset$ *Innengebiet*$(\Gamma) \subset G$ *und* $f : G \setminus \{z_1, z_2\} \to \mathbb{C}$ *holomorph ist.*

Damit sind die Voraussetzungen des Residuensatzes erfüllt und es gilt:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{2} Res(f, z_j). \qquad (*)$$ **(1 Punkt)**

Betrachte zunächst z_1. f_1 und f_3 weisen offensichtlich in z_1 keine Singularitäten auf. f_2 wird in eine Laurent-Reihe um z_1 entwickelt, um zu überprüfen, ob dort eine Singularität vorliegt: **(2 Punkte)**

$$\frac{z-\sinh(z)}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = -\frac{1}{z^3}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = -\left(\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots\right).$$ **(2 Punkte)**

Also ist f_2 analytisch in $\mathbb{C}$. Damit gilt:

$$Res(f_2, z_1) = Res(f, z_1) = 0.$$ **(1 Punkt)**

Betrachte nun z_2. f_1 und f_2 weisen in z_2 keine Singularitäten auf. f_3 hat in z_2 eine Polstelle der Ordnung 3. **(2 Punkte)**

Wir entwickeln f_3 in eine Laurent-Reihe um z_2.

$$\frac{z+2i}{(z+3i)^3} = \frac{z+3i-i}{(z+3i)^3} = \frac{-i+z+3i}{(z+3i)^3} = \frac{-i}{(z+3i)^3} + \frac{1}{(z+3i)^2}.$$ **(2 Punkte)**

Die Laurent-Reihe von f_3 ist also $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot (z+3i)^n$ mit $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq -3, -2$. Insbesondere ist

$$c_{-1} = Res(f_3, z_2) = Res(f, z_2) = 0.$$ **(1 Punkt)**

Insgesamt folgt nun mit Einsetzen in $(*)$:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$ **(1 Punkt)**

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion f, gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 2\pi z^2 + \pi^2 z},$$

für $0 < |z| < \pi$ in eine Laurent-Reihe um den Entwicklungspunkt $a = 0$.

Lösung: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z^2 + 2\pi z + \pi^2)} \\
&= \frac{1}{z(z+\pi)^2} && \textbf{(1 P.)} \\
&= \frac{1}{\pi^2 z} \frac{1}{(1 - (-z/\pi))^2} && \textbf{(1 P.)} \\
&\overset{|z/\pi|<1}{=} \frac{1}{\pi^2 z} \sum_{k=1}^{\infty} k\Big(-\frac{z}{\pi}\Big)^{k-1} && \textbf{(3 P.)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^{k-1}\pi^{-k-1}z^{k-2}. && \textbf{(1 P.)} \\
\Bigg(&\overset{\substack{l=k-2 \\ k=l+2}}{=} \sum_{l=-1}^{\infty} (l+2)(-1)^{l+1}\pi^{-l-3}z^{l} \Bigg)
\end{aligned}$$

Aufgabe (Fourier) *(6 Punkte)*

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zwei absolut integrierbare Funktionen. Dann ist die Faltung definiert durch

$$(f \circledast g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\xi)g(\xi)d\xi.$$

Zeigen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung: Für die Fouriertransformierten von f und g gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f \circledast g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g).$$

Lösungsvorschlag: Man hat

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f \circledast g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}(f \circledast g)(t)dt && \textbf{(1 Punkt)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\xi)g(\xi)d\xi dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t-\xi)g(\xi)dtd\xi, \text{ da } f, g \text{ absolut integrierbar sind} && \textbf{(3 Punkte)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(s+\xi)} f(s)ds\, g(\xi)d\xi, \text{ substituiere } s = t-\xi && \textbf{(1 Punkt)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)e^{-i\omega\xi}g(\xi)d\xi && \textbf{(1 Punkt)}\\
&= \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g).
\end{aligned}$$

Aufgabe 6: (12 Punkte)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) + u(t) & = -3t + 3, \quad t > 0, \\ u\ (0) & = 0, \\ u'\ (0) & = 0. \end{cases}$$

Lösung:

Laut Vorlesung („Ableitungsregel“) gilt:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left(u'\,(t)\right)(s) & = s \cdot \mathcal{L}\left(u(t)\right)(s) - u(0+), \\ \mathcal{L}\left(u''(t)\right)(s) & = s^2 \cdot \mathcal{L}\left(u(t)\right)(s) - s \cdot u(0+) - u'(0+). \end{cases} \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

Setzt man $\tilde{u}(s) = \mathcal{L}\left(u(t)\right)(s)$, so erhält man unter Berücksichtigung von $u(0+) = u'(0+) = 0$ und mit der Linearität der Laplace-Transformation:

$$\mathcal{L}\left(u''(t) + 2u'(t) + u(t)\right)(s) = s^2 \cdot \tilde{u}(s) + 2s \cdot \tilde{u}(s) + \tilde{u}(s) = \mathcal{L}(-3t + 3)(s) = \frac{-3}{s^2} + \frac{3}{s}.$$

Auflösen nach $\tilde{u}(s)$ liefert:

$$\tilde{u}(s) = \frac{3}{s^2} \cdot \frac{(s-1)}{(s+1)^2}. \qquad \textbf{(3 Punkte)}$$

Mittels Partialbruchzerlegung erhält man:

$$\tilde{u}(s) = \frac{9}{s} - \frac{3}{s^2} - \frac{9}{(s+1)} - \frac{6}{(s+1)^2}. \qquad (*) \quad \textbf{(3 Punkte)}$$

Aus Vorlesung und Übung sind Laplace-Transformierte von Standardfunktionen bekannt (s.u.). Damit ergibt sich:

$$(*) = \mathcal{L}(9)(s) - \mathcal{L}(3 \cdot t)(s) - \mathcal{L}(9 \cdot e^{-t})(s) - \mathcal{L}(6 \cdot t \cdot e^{-t})(s) \qquad \textbf{(3 Punkte)}$$

Das bedeutet nichts anderes als

$$u(t) = 9 - 3 \cdot t - 9 \cdot e^{-t} - 6 \cdot t \cdot e^{-t}. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Bemerkung: In der Vorlesung wurde für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\mu)$ folgende Tabelle angegeben:

f	$\mathcal{L}f$
$t^k \cdot e^{\mu \cdot t}$	$\dfrac{k!}{(s-\mu)^{k+1}}$