Univ.-Prof. Dr. S. Maier-Paape

Institut für Mathematik
RWTH Aachen University

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

Institut für Mathematik

Telefon: +49 241 - 80 94925
Fax: +49 241 - 80 94923
Adresse: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
D –52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik IV (Bachelor / Vordiplom)
Sommersemester 2011, 10.08.2011
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1: **[*9 Punkte*]**

Max und Moritz spielen folgendes Spiel: Eine faire Münze wird 3000 mal geworfen. Sie vereinbaren, dass Max gewinnt, falls öfter als 1700 mal Wappen oben liegt. Max hat noch eine gezinkte Münze, die auf beiden Seiten Wappen zeigt. Es gelingt ihm, diese 500 mal während des Spiels einzusetzen. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, dass Max gewinnt.

Auszug aus einer Tabelle zur Standardnormalverteilung:

Die fettgedruckten Überschriften sind Ausprägungen einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen. Die Zahlen mit vier Nachkommastellen in der Tabelle stellen die zugehörigen Verteilungswerte dar. So entspricht der grau unterlegte Eintrag (Z standardnormalverteilt):

$$P(Z \leq 0.51) = 0.6950.$$

	…0	**…1**	**…2**	**…3**	**…4**	**…5**	**…6**	**…7**	**…8**	**…9**
0.0…	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.5…	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
1.0…	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.5…	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
2.0…	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.5…	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952

Aufgabe 2: **[*9 Punkte*]**

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ($G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet) die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** löst. Leiten Sie die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen unter alleiniger Verwendung der Definition von **holomorphen Funktionen** her.

Hinweis: Verwenden Sie bei Ihrer Bearbeitung für die Funktion f die Darstellung $f(z) = \mathrm{u}(x,y) + i \cdot \mathrm{v}(x,y)$ mit $\mathrm{u}(x,y) = \mathfrak{Re}\,(f(z))$, $\mathrm{v}(x,y) = \mathfrak{Im}\,(f(z))$ und $z = x + iy \in G$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: **[*12 Punkte*]**

Man berechne für die Funktion f, gegeben durch

$$f(z) := z^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{z-3i}\right) + \frac{z - \sinh(z)}{z^3} + \frac{z+2i}{(z+3i)^3}\,,$$

das Kurvenintegral

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz$$

längs der Kurve Γ, die parametrisiert wird durch

$$\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \gamma(\varphi) := 2 \cdot \exp(i\varphi) - \frac{3}{2}i\,.$$

Aufgabe 4: **[*6 Punkte*]**

Entwickeln Sie die Funktion f, gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 2\pi z^2 + \pi^2 z}\,,$$

für $0 < |z| < \pi$ in eine Laurent-Reihe um den Entwicklungspunkt $a = 0$.

B I T T E W E N D E N !

Aufgabe 5: **[*6 Punkte*]**

Seien $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zwei absolut integrierbare Funktionen. Dann ist die Faltung definiert durch

$$(f \circledast g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\xi)g(\xi)d\xi.$$

Zeigen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung: Für die Fouriertransformierten von f und g gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f \circledast g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g).$$

Aufgabe 6: **[*12 Punkte*]**

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) + u(t) & = -3t + 3, \quad t > 0, \\ u(0) & = 0, \\ u'(0) & = 0. \end{cases}$$

V i e l E r f o l g !