RWTH AACHEN
Univ.-Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 1010 | 109 (Hauptgebäude)

Tel.: +49 241 80 94925
Sekr.: +49 241 80 94927
Fax: +49 241 80 92323
maier@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de/∼maier

B. Sc./Vordiplom
WS 2011/12

Klausur: Höhere Mathematik IV

10. Februar 2012
Dauer: 60 Minuten

Studiengang: Elektrotechnik

Aufgabe 1 **[10 Punkte]**

Die stetige Wahrscheinlichkeitsdichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der stetigen Zufallsvariablen X sei definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} c/t^4, & |t| \geq 1, \\ d(2-t^2), & |t| < 1. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $P(\{X = 0\})$.
(b) Bestimmen Sie c und d.
(c) Errechnen Sie $P(\{-2 < X \leq 0\})$.
(d) Geben Sie Erwartungswert und Varianz von X an.

Lösung

(a) Da f stetig ist, ist auch F, definiert durch $F(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, stetig und es gilt $F(x-) = F(x)\,\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Damit ist $P(\{X = 0\}) = F(0) - F(0-) = 0$. **[1]**

(b) Damit f stetig ist, müssen die Bedingungen

$$\lim_{t\nearrow -1} f(t) = \lim_{t\searrow -1} f(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t\nearrow 1} f(t) = \lim_{t\searrow 1} f(t)$$

gelten. Beide Bedingungen sind, wegen $f(t) = f(-t)$, äquivalent zu $c = d$. **[1]**

Bestimme nun c derart, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, also insbesondere $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ erfüllt: **[1]**

$$1 \stackrel{!}{=} \int\limits_{-\infty}^{-1} c/t^4\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{1} c(2-t^2)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{1}^{\infty} c/t^4\,\mathrm{d}t = c/3 + 10c/3 + c/3 = 4c \Rightarrow c = 1/4.$$

[1]

(c) $P(\{-2 < X \leq 0\}) = P(\{-2 < X \leq -1\}) + P(\{-1 < X \leq 0\}) =: (*)$. **[1]**

Berechne diesen Ausdruck über Darstellung der Verteilungsfunktion als Integral über die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$(*) = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{1}{4t^4}\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{0} \frac{2-t^2}{4}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(\left[\frac{-1}{3t^3}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{6t-t^3}{3}\right]_{-1}^{0} \right) = \frac{47}{96}.$$

[2]

(d) f ist gerade, damit ist $t \mapsto t \cdot f(t)$ ungerade und es gilt $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. **[1]**

Berechne nun die Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f(t)\,\mathrm{d}t - 0^2 = 2\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{4t^2}\,dt + 2\int\limits_{0}^{1} \frac{2t^2 - t^4}{4}\,dt = \frac{11}{15}.$$

[2]

Aufgabe 2 **[9 Punkte]**

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$ holomorph und für den Imaginärteil von f gelte $\mathrm{Im}(f) \leq C_0$ für eine Konstante $C_0 \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass dann f auf ganz $\mathbb{C}$ konstant sein muss, also $f(z) = const. \, \forall\, z \in \mathbb{C}$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch $g(z) := \exp(\widetilde{f}(z))$ mit einem geeigneten $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Lösung

Betrachte $g(z) = \exp(-if(z))$. **[2]**

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |\exp(-if(z))| = |\exp(\mathrm{Im}(f(z)) - i\mathrm{Re}(f(z)))| \\ &= |\exp(\mathrm{Im}(f(z)))| \leq \exp(C_0) = const. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ g ist beschränkt. Mit dem *Satz von Liouville* folgt, dass g konstant ist, d.h. $\exists\, C \in \mathbb{C}$, so dass **[2]**

$$g(z) = C \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (-i)f(z) &= \mathrm{Log}(g(z)) = \mathrm{Log}(C) \\ &= \log(|C|) + i \cdot \arg(C) + i \cdot 2k_0\pi \end{aligned}$$

für <u>ein</u> k_0 aus $\mathbb{Z}$, da f holomorph und damit insbesondere stetig. **[1]**
$\Rightarrow f(z) = const.$ **[1]**

<u>*Alternativ:*</u>
$g(z) = C$ ist holomorph.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 = g'(z) = -i\exp(-if(z))f'(z). \\ &\Rightarrow f'(z) = 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(z) = const.$ **[1]**

Aufgabe 3 **[11 Punkte]**

Zeigen Sie mit dem Residuensatz, dass für $a \in \mathbb{C}$ die folgende Identität gilt:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{az}}{z^4+2z^3+2z^2}\,dz = \pi i\left(a-1+\cos(a)\cdot e^{-a}\right)\,.$$

Lösung

Betrachte zunächst den Nenner:

$$\begin{aligned} z^4+2z^3+2z^2 = z^2\left(z^2+2z+2\right) = 0\,. \\ \Rightarrow z = 0 \text{ oder } z^2+2z+2 = 0\,. \\ \Rightarrow z = 0 \text{ oder } z = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i\,. \end{aligned}$$

Man erhält also $z^4+2z^3+2z^2 = z^2\,(z+1+i)\,(z+1-i)$. Dann hat die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) := \frac{e^{az}}{z^4+2z^3+2z^2},$$

da $e^{az} \neq 0$ ist für alle $a, z \in \mathbb{C}$, in den Punkten $z = -1+i$ und $z = -1-i$ einfache Pole und in $z = 0$ einen Pol der Ordnung 2. Alle drei Singularitäten liegen innerhalb von $B_3(0)$. **[1]**

Berechne also die Residuen:

(i)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f,-1+i) &= \lim_{z\to -1+i}(z+1-i)\cdot f(z) \\ &= \lim_{z\to -1+i}\frac{e^{az}}{z^2\,(z+1+i)} = \frac{e^{a(-1+i)}}{(-1+i)^2\,2i} \\ &= \frac{e^{-a}\cdot e^{ia}}{2i\cdot(1-2i-1)} = \frac{1}{4}\cdot e^{-a}\cdot e^{ia}\,. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f,-1-i) &= \lim_{z\to -1-i}(z+1+i)\cdot f(z) \\ &= \lim_{z\to -1-i}\frac{e^{az}}{z^2\,(z+1-i)} = \frac{e^{a(-1-i)}}{(-1-i)^2\,(-2i)} \\ &= \frac{e^{-a}\cdot e^{-ia}}{-2i\cdot(1+2i-1)} = \frac{1}{4}\cdot e^{-a}\cdot e^{-ia}\,. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f,0) &= \frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\cdot f(z)\right) \\ &= \frac{1}{1!}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\cdot\frac{e^{az}}{z^2\,(z^2+2z+2)}\right) \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{az}}{z^2+2z+2}\right) \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{a\cdot e^{az}\,(z^2+2z+2) - e^{az}\,(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2} \\ &= \frac{2a-2}{4} = \frac{a}{2}-\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Nun folgt mit dem Residuensatz:

$$\begin{aligned}\int\limits_{|z|=3} f(z)\,dz &= 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,-1-i)+\operatorname{Res}(f,-1+i)\right)\\ &= 2\pi i\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot e^{-a}\cdot e^{-ia}+\frac{1}{4}\cdot e^{-a}\cdot e^{ia}\right)\\ &= \pi i\left(a-1+e^{-a}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{ia}+e^{-ia}\right)\right)\\ &= \pi i\left(a-1+e^{-a}\cdot\cos(a)\right).\end{aligned}$$

Hinweis zur Vergabe der Punkte:
Es gibt zwei Punkte für die richtige Angabe der Nullstellen des Nenners und einen für die Erkenntnis, dass alle drei Singularitäten in $B_3(0)$ liegen.
Bei der Berechnung der Residuen entfällt je ein Punkt darauf, dass man erkennt, um welche Art von Singularität es sich handelt, d.h. auf den richtigen Ansatz zur Berechnung des Residuums, und je einer (bzw. zwei beim Pol zweiter Ordnung) auf die richtige Rechnung.
Schließlich gibt es noch einen Punkt für die Anwendung des Residuensatzes bzw. das Zusammenfassen.

Aufgabe 4 **[6 Punkte]**

Entwickeln Sie die Funktion f, gegeben durch $f(z) := (z-2)/(z^3-3z^2+2z)$, in eine Laurent-Reihe auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ in $z_0 = 0$.

Lösung

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z-2}{z^3-3z^2+2z} \\
&= \frac{z-2}{z(z^2-3z+2)} \\
&= \frac{z-2}{z(z-1)(z-2)} \\
&= \frac{1}{z(z-1)} \\
&= \frac{z-(z-1)}{z(z-1)} \\
&= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{z} \\
&= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - \frac{1}{z} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k - \frac{1}{z} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-2} z^k.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 **[12 Punkte]**

Berechnen Sie mithilfe der Laplace-Transformation für $a > 0$ die Lösung $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Gleichung

$$\begin{cases} u''(t) + a^2 u(t) = 0, & t > 0, \\ u(0) = 0, & \\ \int\limits_0^\infty e^{-t} u(t) \mathrm{d}t = 1. & \end{cases}$$

Lösung

Wir schreiben $\mathcal{L}v$ für die Laplace-Transformation von $v : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, das heißt

$$(\mathcal{L}v)(s) := \int\limits_0^\infty e^{-st} v(t) \mathrm{d}t.$$

Wir haben

$$(\mathcal{L}u'')(s) = s^2(\mathcal{L}u)(s) - su(0) - u'(0) = s^2(\mathcal{L}u)(s) - u'(0), \qquad \textbf{[2]}$$

so dass

$$s^2(\mathcal{L}u)(s) - u'(0) + a^2(\mathcal{L}u)(s) = 0. \qquad \textbf{[2]}$$

Setzen wir, da $(\mathcal{L}u)(1) = \int_0^\infty e^{-t} u(t) \mathrm{d}t = 1$ gilt, $s = 1$, dann bekommen wir **[2]**

$$u'(0) = 1 + a^2, \qquad \textbf{[2]}$$

und deshalb ist

$$(\mathcal{L}u)(s) = \frac{1 + a^2}{s^2 + a^2} = \frac{1 + a^2}{a} \frac{a}{s^2 + a^2}, \qquad \textbf{[2]}$$

also

$$u(t) = \frac{1 + a^2}{a} \sin(at). \qquad \textbf{[2]}$$

Aufgabe 6 **[6 Punkte]**

Zeigen Sie, dass für Lösungen $u = u(t,x)$ der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u &= d \cdot \partial_x^2 u\,, && \text{für } t > 0,\ x \in (0,\pi), \\ u(0,x) &= u_0(x)\,, && \text{für } x \in (0,\pi), \\ u(t,0) = u(t,\pi) &= 0\,, && \text{für } t > 0, \end{aligned}$$

mit einer vorgegebenen Diffusionskonstante $d > 0$ und einer Anfangsbedingung $u_0 \in L^2(0,\pi)$ die folgende Abschätzung gilt:

$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} \le e^{-dt} \cdot \|u_0\|_{L^2(0,\pi)}\,.$

Lösung

Sei

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)}_{=:e_k}, \qquad \|u_0\|_{L^2(0,\pi)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2}.$$

[2]

Dann ist aus der Vorlesung bekannt, dass Lösungen der gegebenen Wärmeleitungsgleichung die folgende Gestalt haben:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-dk^2 t} \cdot e_k(x).$$

[2]

Damit gilt:

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 e^{-2dk^2 t}} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 e^{-2dt}} = \sqrt{e^{-2dt}} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2} = e^{-dt} \cdot \|u_0\|_{L^2(0,\pi)}\,.$$

[2]