

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$F: \{z \in \mathbb{C}: |z - i| \neq 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto F(z) := \oint_{|w-i|=1} \frac{(z+w)^2}{(w^2+1)^2} dw.$$

(a) Berechnen Sie eine integralfreie Darstellung von $F(z)$ für $|z - i| < 1$.

(b) Was ist $F'(-i)$?

Lösung

(a) Für das Polynom im Nenner gilt: $(w^2 + 1)^2 = (w - i)^2(w + i)^2$.

Der Integrand hat also in dem Gebiet, das von dem Integrationsweg umschlossen wird, eine doppelte Polstelle in i . Dabei lässt sich $F(z)$ für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ darstellen als

$$F(z) = \oint_{|w-i|=1} f(w) \frac{1}{(w-i)^2} dw \quad \text{mit} \quad f(w) = \frac{(z+w)^2}{(w+i)^2}.$$

f ist differenzierbar an der Stelle i und für die erste Ableitung von f an der Stelle i gilt

$$f'(i) = \frac{2 \cdot (z+i) \cdot (w+i)^2 - 2 \cdot (z+w)^2 \cdot (w+i)}{(w+i)^4} \Big|_{w=i} = 2 \frac{2i \cdot (z+i) - (z+i)^2}{(2i)^3} = \frac{-i}{4}(z^2 + 1). \quad (1)$$

Nun werden parallel zwei Ansätze aufgezeigt.

1. Ansatz: Man stellt fest, dass für das Gebiet $G := \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ die Funktion f holomorph auf G ist. Des Weiteren ist die positiv orientierte Kurve, die durch $|w - i| = 1$ induziert wird, einfach geschlossen und regulär (als Kreisrand) und liegt in G . Weiter gilt, dass das Innengebiet davon ganz in G liegt, da $-i \notin \bar{B}_1(i)$ wegen $|-i - i| = 2 > 1$.

Nun verwendet man die Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel (Folg. 12.5.13) und erhält mit (1):

$$F(z) = \oint_{|w-i|=1} f(w) \frac{1}{(w-i)^2} dw = 2\pi i \cdot f'(i) = \frac{\pi}{2}(z^2 + 1).$$

Da dies für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ gilt, gilt es insbesondere für $|z - i| < 1$.

2. Ansatz: Man stellt fest, dass für das Gebiet $G := \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ die Funktion g , definiert durch $g(w) := f(w)/(w - i)^2$, holomorph auf $G \setminus \{i\}$ ist. Dann gilt mit dem Residuensatz

$$F(z) = \oint_{|w-i|=1} f(w) \frac{1}{(w-i)^2} dw = \oint_{|w-i|=1} g(w) dw = 2\pi i \cdot \text{Res}(g, i).$$

Weiterhin gilt mit Lemma 12.8.5 für $z \neq -i$, da g einen Pol zweiter Ordnung in i hat, dass

$$\text{Res}(g, i) = \frac{1}{1!} \lim_{w \rightarrow i} \left[\frac{d}{dw} (w - i)^2 g(w) \right] = \lim_{w \rightarrow i} f'(w) = f'(i).$$

Für $z = -i$ ergibt sich dagegen $\text{Res}(g, i) = 0$, da g dann keine Singularität in i hat (kürzt sich raus). Damit ergibt sich insgesamt $F(z) = (\pi/2)(z^2 + 1)$ für beliebiges $z \in \mathbb{C}$, insbesondere für $|z - i| < 1$.

(b) $F(z)$ aus Teil (a) ist gegeben durch $F(z) = \frac{\pi}{2}(z^2 + 1)$, wobei z nicht eingeschränkt sein muss. Damit ist F holomorph und es gilt $F'(z) = \pi z$ und daher $F'(-i) = -\pi i$.

Aufgabe 2

Die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sei für $z \in \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) := z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$.

- (a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f .
 (b) Berechnen Sie mithilfe von Teil (a) das Integral

$$\oint_{\partial M} \frac{4z^3 - 6z^2 + 6z - 2}{f(z)} dz,$$

wobei $M := \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| + |z - 1 + i| < 2\sqrt{2}\}$.

Hinweis: Es liegen Nullstellen von f in M , was unter anderem zu zeigen ist.

Lösung

(a) Durch Ausprobieren erkennt man, dass i eine Nullstelle ist.

Da die Koeffizienten von f alle reell sind, muss auch $-i$ eine Nullstelle sein. Es ergibt sich damit, dass $z^2 + 1$ ein Teiler von f ist. Zur Bestimmung der beiden restlichen Nullstellen wird eine Polynomdivision ausgeführt:

$$(z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2)/(z^2 + 1) = z^2 - 2z + 2.$$

Die Nullstellen von $z^2 - 2z + 2$ sind wiederum $1 + i$ und $1 - i$. Insgesamt sind daher die vier Nullstellen von f :

$$z_1 = -i, \quad z_2 = 1 - i, \quad z_3 = i, \quad z_4 = 1 + i.$$

(b) ∂M kann als einfach geschlossene, reguläre Kurve definiert werden und es gilt $f \neq 0$ auf ∂M , denn

$$\begin{aligned} z_1 : & \quad |-i + 1 + i| + |-i - 1 + i| = |1| + |-1| = 2 < 2\sqrt{2}, \\ z_2 : & \quad |1 - i + 1 + i| + |1 - i - 1 + i| = |2| = 2 < 2\sqrt{2}, \\ z_3 : & \quad |i + 1 + i| + |i - 1 + i| = |1 + 2i| + |-1 + 2i| = 2\sqrt{5} > 2\sqrt{2}, \\ z_4 : & \quad |1 + i + 1 + i| + |1 + i - 1 + i| = |2 + 2i| + |2i| = 2\sqrt{2} + 2 > 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Also liegen zwei der vier Nullstellen im Innengebiet von ∂M und zwei außerhalb von $\bar{M}$.

Die Vielfachheiten der Nullstellen sind jeweils eins,

1. Ansatz Es gilt $f'(z) = 4z^3 - 6z^2 + 6z - 2$. Weiterhin ist f als Polynom holomorph auf $\mathbb{C}$.

Dann gilt mit Satz 12.8.12 (Anzahlformel), dass $\oint_{\partial M} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i$.

2. Ansatz: Die Funktion g , definiert durch $g(z) := \frac{4z^3 - 6z^2 + 6z - 2}{f(z)}$, ist holomorph auf $\tilde{M} \setminus \{-i, 1 - i\}$, wobei

$$\tilde{M} := \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| + |z - 1 + i| < 2\sqrt{3}\} \supset M.$$

Weiterhin hat die Funktion f nur die beiden Nullstellen $-i$ und $1 - i$ in $\tilde{M}$, welches damit Polstellen erster Ordnung von g sind. Dann gilt mit dem Residuensatz 12.8.3:

$$\oint_{\partial M} \frac{4z^3 - 6z^2 + 6z - 2}{f(z)} dz = 2\pi i \cdot (\text{Res}(g, -i) + \text{Res}(g, 1 - i)).$$

Für die Residuen gilt weiterhin mit Lemma 12.8.4:

$$\text{Res}(g, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} [(z + i)g(z)] = \frac{-4i^3 - 6i^2 - 6i - 2}{-2i(-1 - 2i)(-1)} = \frac{2(2 - i)}{2(2 - i)} = 1$$

$$\text{Res}(g, 1 - i) = \lim_{z \rightarrow 1 - i} [(z - 1 + i)g(z)] = \frac{4(1 - i)^3 - 6(1 - i)^2 + 6(1 - i) - 2}{(1 - 2i)(1)(-2i)} = \frac{-2(2 + i)}{-2(2 + i)} = 1.$$

Insgesamt folgt daher $\oint_{\partial M} \frac{4z^3 - 6z^2 + 6z - 2}{f(z)} dz = 2\pi i \cdot (1 + 1) = 4\pi i$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie mithilfe des Residuensatzes das komplexe Kurvenintegral

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^3(1-z^2)^5}.$$

Lösung

Sei die Funktion f definiert durch $f(z) := \frac{1}{z^3(1-z^2)^5}$.

f hat einen Pol dritter Ordnung in $z_1 := 0$ und Pole fünfter Ordnung in $z_{2/3} := \pm 1$.

Nun ist $z_1 \in M := \{z : |z| < 1/2\}$ und $z_{2/3} \notin \overline{M}$.

Mithilfe der geometrischen Reihe lässt sich f schreiben als

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3(1-z^2)^5} = \frac{1}{z^3} \left(\frac{1}{1-z^2} \right)^5 \stackrel{|z^2|<1}{=} \frac{1}{z^3} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (z^2)^k \right)^5 \\ &= \frac{1}{z^3} (1 + 5z^2 + \mathcal{O}(z^4)) = \frac{1}{z^3} + 5\frac{1}{z} + \mathcal{O}(z). \end{aligned}$$

Durch ablesen erhält man $\text{Res}(f, 0) = 5$.

Mit dem Residuensatz folgt, dass

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^3(1-z^2)^5} = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = 10\pi i.$$

Alternative Lösung:

Sei die Funktion f definiert durch $f(z) := \frac{1}{z^3(1-z^2)^5}$.

f hat einen Pol dritter Ordnung in $z_1 := 0$ und Pole fünfter Ordnung in $z_{2/3} := \pm 1$.

Nun ist $z_1 \in M := \{z : |z| < 1/2\}$ und $z_{2/3} \notin \overline{M}$.

Mit dem Residuensatz gilt nun, dass

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^3(1-z^2)^5} &= 2\pi i \text{Res}(f, 0) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2} [f(z)z^3] \right) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{1}{(1-z^2)^5} \right] \right) \\ &= \pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dx} \left[\frac{10z}{(1-z^2)^6} \right] \right) \\ &= \pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{10(1-z^2) + 120z^2}{(1-z^2)^7} \right) \\ &= 10\pi i. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Für eine Konstante $C_0 \in \mathbb{R}$ sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

$$[\operatorname{Re}(f)]^2 - [\operatorname{Im}(f)]^2 \leq C_0.$$

Zeigen Sie: f ist konstant.

Lösung

Definiere die Funktion $g := e^{f^2}$. Dann gilt mit $f = \operatorname{Re}(f) + i \cdot \operatorname{Im}(f)$

$$|g| = \left| e^{f^2} \right| = \left| e^{[\operatorname{Re}(f)]^2 - [\operatorname{Im}(f)]^2 + 2 \operatorname{Re}(f) \operatorname{Im}(f) i} \right| = \left| e^{[\operatorname{Re}(f)]^2 - [\operatorname{Im}(f)]^2} \right| \underbrace{\left| e^{2 \operatorname{Re}(f) \operatorname{Im}(f) i} \right|}_{=1} = e^{[\operatorname{Re}(f)]^2 - [\operatorname{Im}(f)]^2} \leq e^{C_0} \equiv \text{const.}$$

g ist also betragsmäßig beschränkt. Insbesondere ist g holomorph.

Dann existiert mit Satz von Liouville eine Konstante $C_1 \in \mathbb{C}$, so dass $g(z) = C_1 \forall z \in \mathbb{C}$, d.h. g ist konstant.

Wir logarithmieren komplex: $f(z)^2 = \log(g(z)) = \log(C_1) = \log(|C_1|) + i \cdot \arg(C_1) + 2\pi i \cdot k(z)$, wobei $k(z) \in \mathbb{Z}$ theoretisch von z abhängen könnte.

Nun sind f und damit auch f^2 holomorph, also insbesondere stetig. Damit können wir $k(z)$ durch ein festes $k_0 \in \mathbb{Z}$ ersetzen, d.h. es gibt ein $C_2 \in \mathbb{C}$, so dass $f^2(z) = C_2 \forall z \in \mathbb{C}$, d.h. f^2 ist konstant.

Weiter ist $f(z) = \sqrt{|C_2|} e^{i \arg(C_2)/2 + \pi i \ell(z)}$ für $\ell(z) \in \mathbb{Z}$. Analog zu obiger Argumentation ist $\ell(z)$ unabhängig von z , da f stetig. Folglich ist f konstant, was zu zeigen war.

Alternative Lösung:

Es gilt, dass

$$\operatorname{Re}(f^2) = \operatorname{Re} \{ [\operatorname{Re}(f)]^2 - [\operatorname{Im}(f)]^2 + 2 \operatorname{Re}(f) \operatorname{Im}(f) i \} = [\operatorname{Re}(f)]^2 - [\operatorname{Im}(f)]^2 \leq C_0,$$

d.h. der Realteil von f^2 ist beschränkt.

Damit ist nach Übung f^2 konstant, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ mit $f(z)^2 = c \forall z \in \mathbb{C}$.

Weiter ist $f(z) = \sqrt{|c|} e^{i \arg(c)/2 + \pi i \ell(z)}$ für $\ell(z) \in \mathbb{Z}$, wobei $\ell(z) \in \mathbb{Z}$ theoretisch von z abhängen könnte.

Nun ist f aber holomorph, also insbesondere stetig. Damit können wir $\ell(z)$ durch ein festes $\ell_0 \in \mathbb{Z}$ ersetzen, d.h. es gibt ein $C_3 \in \mathbb{C}$, so dass $f(z) = C_3 \forall z \in \mathbb{C}$, d.h. f ist konstant, was zu zeigen war.