

Aufgabe 1

Gegeben sei $H: \{z \in \mathbb{C}: |z| \neq 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$H(z) := \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{|w|=1} \frac{1}{w(w-z)} dw \quad \text{für } |z| \neq 1.$$

(a) Geben Sie $H(z)$ für $|z| \neq 1$ integralfrei an.

(b) Ist H holomorph fortsetzbar auf $\mathbb{C}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Nutzen Sie z.B. Partialbruchzerlegung für $z \neq 0$ fest.

Lösung

(a) **Für $z \neq 0$** gilt die Partialbruchzerlegung $\frac{1}{w(w-z)} = \frac{1}{z} \left(\frac{-1}{w} + \frac{1}{w-z} \right)$ für $w \neq 0, w \neq z$.

$$\text{Damit erhält man für } z \neq 0: \quad H(z) = \frac{1}{2\pi i \cdot z} \cdot \left[\oint_{|w|=1} \frac{1}{w-z} dw - \oint_{|w|=1} \frac{1}{w} dw \right].$$

Der zweite Integrand steht hier bereits als Laurentreihe um den Entwicklungspunkt 0, dessen Singularität, und der erste Integrand als Laurentreihe um den Entwicklungspunkt z , ebenfalls dessen Singularität. Das Residuum der beiden Integranden um deren jeweilige Polstelle ist in beiden Fällen also 1.

Da weiterhin die Kurve $\Gamma = \{|w| = 1\}$ als Kreisrand einfach geschlossen, regulär und positiv orientiert ist, gilt:

Die einzige Polstelle von $1/w$, die 0, liegt im Inneren von Γ , weshalb aus dem Residuensatz

$$\oint_{|w|=1} \frac{1}{w} dw = 2\pi i \text{ folgt.}$$

Weiterhin liegt für $|z| < 1$ die einzige Polstelle von $1/(w-z)$ ebenfalls im Inneren von Γ . Damit ergibt auch das erste Integral $2\pi i$ und es gilt daher mit dem Residuensatz

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i \cdot z} \cdot \left[\oint_{|w|=1} \frac{1}{w-z} dw - \oint_{|w|=1} \frac{1}{w} dw \right] = \frac{1}{2\pi i \cdot z} \cdot (2\pi i - 2\pi i) = 0 \quad \text{für } 0 < |z| < 1.$$

Für $|z| > 1$ liegt die einzige Polstelle von $1/(w-z)$ nicht im Inneren von Γ , sodass $1/(w-z)$ in einer genügend kleinen offenen Kugel mit Radius > 1 um die 0 holomorph ist. Da trivialerweise dann das Innere von Γ und Γ selbst ganz in dieser größeren Kugel enthalten ist, gilt mit dem Satz von Cauchy und dem bereits Gefundenen

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i \cdot z} \cdot \left[\oint_{|w|=1} \frac{1}{w-z} dw - \oint_{|w|=1} \frac{1}{w} dw \right] = \frac{1}{2\pi i \cdot z} \cdot (0 - 2\pi i) = -\frac{1}{z} \quad \text{für } |z| > 1.$$

Für $z = 0$ ist $1/w^2$ bereits Laurentreihe um den Entwicklungspunkt 0 und daher das Residuum dort

$$0 \text{ und es folgt mit dem Residuensatz } H(0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{|w|=1} \frac{1}{w^2} dw = 0.$$

Insgesamt ist damit $H(z)$ gegeben durch: $H(z) = \begin{cases} 0 & |z| < 1 \\ -z^{-1} & |z| > 1 \end{cases}.$

(b) Da $|-1/z| \rightarrow 1$ für $|z| \rightarrow 1$ ist H nicht stetig fortsetzbar auf $|z| = 1$.

Damit ist es insbesondere nicht holomorph fortsetzbar.

Aufgabe 2

Berechnen Sie mithilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x+2}{x^5+2x^4+4x+8} dx.$$

Lösung

Wir definieren $f(x) := x^5 + 2x^4 + 4x + 8$, dann ist $f(-2) = 0$, d.h. f besitzt eine Nullstelle bei $x = -2$. Eine Polynomdivision ergibt $g(x) := f(x)/(x+2) = x^4 + 4$ und das Integral lässt sich umformen zu

$$I := \int_0^{\infty} \frac{x+2}{x^5+2x^4+4x+8} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+4} dx \stackrel{\text{Symmetrie}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+4} dx.$$

Mit dem Ansatz $z = re^{\phi i}$ für $r > 0$ und $\phi \in [0, 2\pi)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} g(z) = 0 &\Leftrightarrow z^4 = -4 \\ &\Leftrightarrow r^4 e^{4\phi i} = 4e^{\pi i} \\ &\Leftrightarrow r = \sqrt{2} \quad \wedge \quad 4\phi = (1+2k)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow r = \sqrt{2} \quad \wedge \quad \phi = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}k\right)\pi, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (\text{da } \phi \in [0, 2\pi)). \end{aligned}$$

Die Nullstellen von g sind somit gegeben durch $z_k := \sqrt{2}e^{(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}k)\pi i}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Sei nun $R > \sqrt{2}$ und $\phi \in [0, \pi]$, dann gilt für $\tilde{g}(z) := \frac{1}{g(z)}$

$$\begin{aligned} R |\tilde{g}(Re^{\phi i})| &= \frac{R}{|R^4 e^{4\phi i} + 4|} \\ &= \frac{R}{|R^4 (\cos(4\phi) + i \sin(4\phi)) + 4|} \\ &= \frac{R}{(R^4 \cos(4\phi) + 4)^2 + R^8 \sin^2(4\phi)} \\ &= \frac{R}{R^8 + 8R^4 \cos(4\phi) + 16} \\ &\leq \frac{R}{R^8 - 8R^4 + 16} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Weiter ist $\tilde{g}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ und es folgt mit Satz 12.8.7

$$I = \pi i (\text{Res}(\tilde{g}, z_0) + \text{Res}(\tilde{g}, z_1)).$$

Wegen $z_0 = -z_2, z_1 = -z_3$ und $z_0^2 = -z_1^2$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Res}(\tilde{g}, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \tilde{g}(z)(z - z_0) = \frac{1}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)} = \frac{1}{2z_0(z_0^2 - z_1^2)} = \frac{1}{8\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}} = \frac{1}{-8+8i} \\ &= -\frac{1+i}{16} \end{aligned}$$

und

$$\text{Res}(\tilde{g}, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \tilde{g}(z)(z - z_1) = \frac{1}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} = \frac{1}{2z_1(z_1^2 - z_0^2)} = \frac{1}{8\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}} = \frac{1}{8+8i} = \frac{1-i}{16}.$$

Insgesamt folgt

$$I = \pi i \left(-\frac{1+i}{16} + \frac{1-i}{16} \right) = \frac{\pi}{8}.$$

Aufgabe 3

Ein Kohlekraftwerk speist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% innerhalb von 100 Tagen mehr als 500 GWh ins Netz ein.

Im Mittelwert liefert es 533 GWh auf 100 Tage. Wie hoch sind Mittelwert und Standardabweichung der täglichen Einspeisung, wenn man davon ausgeht, dass die täglichen Werte stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind?

Hinweis: $\Phi(1,65) \approx 95\%$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Lösung

Für den Tag i , $i \in \mathbb{N}$, werde die Netzeinspeisung durch die Zufallsvariable X_i beschrieben, wobei X_i , $i \in \mathbb{N}$, stochastisch unabhängig und identisch verteilt (iid.) sind.

Die Netzeinspeisung nach N Tagen sei gegeben durch die Zufallsvariable $S_N := \sum_{i=1}^N X_i$.

Bekannt ist

$$\begin{aligned} P(S_{100} > 500 \text{ GWh}) &= 95\%, \\ E(S_{100}) &= 533 \text{ GWh}. \end{aligned}$$

Gesucht sind $\mu := E(X_i)$ und $\sigma := \text{Var}(X_i)$.

Da die täglichen Einspeisungen iid. sind, ist $E(S_N) = N \cdot \mu$ und daher $\mu = E(S_{100})/100 = 5,33 \text{ GWh}$.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} 95\% = P(S_{100} > 500 \text{ GWh}) &\Leftrightarrow 95\% = 1 - P(S_{100} \leq 500 \text{ GWh}) \\ &\Leftrightarrow 95\% = 1 - P\left(\frac{S_{100} - 100 \cdot \mu}{\sqrt{100} \cdot \sigma} \leq \frac{500 \text{ GWh} - 100 \cdot \mu}{\sqrt{100} \cdot \sigma}\right). \end{aligned}$$

Mit dem zentralen Grenzwertsatz folgt

$$95\% \approx 1 - \Phi\left(\frac{500 \text{ GWh} - 100 \cdot \mu}{\sqrt{100} \cdot \sigma}\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bzw. die Gaußsche Fehlerfunktion ist.

Aus Symmetriegründen gilt $1 - \Phi(t) = \Phi(-t)$ und daher $\Phi\left(-\frac{500 \text{ GWh} - 100 \cdot \mu}{\sqrt{100} \cdot \sigma}\right) \approx 95\%$.

Aus dem Hinweis folgt, dass

$$\begin{aligned} 1,65 &\approx -\frac{500 \text{ GWh} - 100 \cdot \mu}{\sqrt{100} \cdot \sigma} \\ \Leftrightarrow \sigma &\approx -\frac{500 \text{ GWh} - 100 \cdot \mu}{\sqrt{100} \cdot 1,65} = -\frac{50 - 53}{1,65} \text{ GWh} = 2 \text{ GWh}. \end{aligned}$$

Die tägliche Einspeisung ist im Mittel 5,33 GWh mit einer Standardabweichung von etwa 2 GWh.