RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 109

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
Fax: +49 241 80 92323
maier@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de/maier

B. Sc. 17.08.2016
SoSe 2016

Klausur: Höhere Mathematik IV (Physiker)

Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1
Gegeben sei die Funktion

$$F \colon \left\{ z \in \mathbb{C} \colon |z-i| \neq 1 \right\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto F(z) := \oint\limits_{|w-i|=1} \frac{(z+w)^2}{(w^2+1)^2} \, \mathrm{d}w \, .$$

(a) Berechnen Sie eine integralfreie Darstellung von $F(z)$ für $|z-i| < 1$.
(b) Was ist $F'(-i)$?

Lösung
(a) Für das Polynom im Nenner gilt: $(w^2+1)^2 = (w-i)^2(w+i)^2$.
Der Integrand hat also in dem Gebiet, das von dem Integrationsweg umschlossen wird, eine doppelte Polstelle in i. Dabei lässt sich $F(z)$ für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ darstellen als

$$F(z) = \oint_{|w-i|=1} f(w) \frac{1}{(w-i)^2} \mathrm{d}w \qquad \text{mit} \qquad f(w) = \frac{(z+w)^2}{(w+i)^2}.$$

f ist differenzierbar an der Stelle i und für die erste Ableitung von f an der Stellte i gilt

$$f'(i) = \left. \frac{2 \cdot (z+w) \cdot (w+i)^2 - 2 \cdot (z+w)^2 \cdot (w+i)}{(w+i)^4} \right|_{w=i} = 2 \frac{2i \cdot (z+i) - (z+i)^2}{(2i)^3} = \frac{-i}{4}(z^2+1). \tag{1}$$

Nun werden parallel zwei Ansätze aufgezeigt.

1. Ansatz: Man stellt fest, dass für das Gebiet $G := \mathbb{C} \backslash \{-i\}$ die Funktion f holomorph auf G ist. Des Weiteren ist die positiv orientierte Kurve, die durch $|w-i| = 1$ induziert wird, einfach geschlossen und regulär (als Kreisrand) und liegt in G. Weiter gilt, dass das Innengebiet davon ganz in G liegt, da $-i \notin \bar{B}_1(i)$ wegen $|-i-i| = 2 > 1$.
Nun verwendet man die Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel (Folg. 12.5.13) und erhält mit (1):

$$F(z) = \oint_{|w-i|=1} f(w) \frac{1}{(w-i)^2} \mathrm{d}w = 2\pi i \cdot f'(i) = \frac{\pi}{2}(z^2+1).$$

Da dies für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ gilt, gilt es insbesondere für $|z-i| < 1$.

2. Ansatz: Man stellt fest, dass für das Gebiet $G := \mathbb{C} \backslash \{-i\}$ die Funktion g, definiert durch $g(w) := f(w)/(w-i)^2$, holomorph auf $G \backslash \{i\}$ ist. Dann gilt mit dem Residuensatz

$$F(z) = \oint_{|w-i|=1} f(w) \frac{1}{(w-i)^2} \mathrm{d}w = \oint_{|w-i|=1} g(w) \mathrm{d}w = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(g, i).$$

Weiterhin gilt mit Lemma 12.8.5 für $z \neq -i$, da g einen Pol zweiter Ordnung in i hat, dass

$$\mathrm{Res}(g, i) = \frac{1}{1!} \lim_{w \to i} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} (w-i)^2 g(w) \right] = \lim_{w \to i} f'(w) = f'(i).$$

Für $z = -i$ ergibt sich dagegen $\mathrm{Res}(g, i) = 0$, da g dann keine Singularität in i hat (kürzt sich raus).
Damit ergibt sich insgesamt $F(z) = (\pi/2)(z^2+1)$ für beliebiges $z \in \mathbb{C}$, insbesondere für $|z-i| < 1$.

(b) $F(z)$ aus Teil **(a)** ist gegeben durch $F(z) = \frac{\pi}{2}(z^2+1)$, wobei z nicht eingeschränkt sein muss.
Damit ist F holomorph und es gilt $F'(z) = \pi z$ und daher $F'(-i) = -\pi i$.

Aufgabe 2

Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei für $z \in \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) := z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$.

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

(b) Berechnen Sie mithilfe von Teil **(a)** das Integral

$$\oint_{\partial M} \frac{4z^3 - 6z^2 + 6z - 2}{f(z)}\,\mathrm{d}z\,,$$

wobei $M := \left\{z \in \mathbb{C}\colon |z + 1 + i| + |z - 1 + i| < 2\sqrt{2}\right\}$.

Hinweis: Es liegen Nullstellen von f in M, was unter anderem zu zeigen ist.

Lösung

(a) Durch Ausprobieren erkennt man, dass i eine Nullstelle ist.

Da die Koeffizienten von f alle reell sind, muss auch $-i$ eine Nullstelle sein. Es ergibt sich damit, dass $z^2 + 1$ ein Teiler von f ist. Zur Bestimmung der beiden restlichen Nullstellen wird eine Polynomdivision ausgeführt:

$$(z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2)/(z^2 + 1) = z^2 - 2z + 2.$$

Die Nullstellen von $z^2 - 2z + 2$ sind wiederum $1 + i$ und $1 - i$. Insgesamt sind daher die vier Nullstellen von f:

$$z_1 = -i, \quad z_2 = 1 - i, \quad z_3 = i, \quad z_4 = 1 + i.$$

(b) ∂M kann als einfach geschlossene, reguläre Kurve definiert werden und es gilt $f \neq 0$ auf ∂M, denn

$$\begin{aligned}
z_1 &: & |-i + 1 + i| + |-i - 1 + i| &= |1| + |-1| = 2 < 2\sqrt{2},\\
z_2 &: & |1 - i + 1 + i| + |1 - i - 1 + i| &= |2| = 2 < 2\sqrt{2},\\
z_3 &: & |i + 1 + i| + |i - 1 + i| &= |1 + 2i| + |-1 + 2i| = 2\sqrt{5} > 2\sqrt{2},\\
z_4 &: & |1 + i + 1 + i| + |1 + i - 1 + i| &= |2||1 + i| + |2||i| = 2\sqrt{2} + 2 > 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Also liegen zwei der vier Nullstellen im Innengebiet von ∂M und zwei außerhalb von $\bar{M}$.

Die Vielfachheiten der Nullstellen sind jeweils eins,

1. Ansatz: Es gilt $f'(z) = 4z^3 - 6z^2 + 6z - 2$. Weiterhin ist f als Polynom holomorph auf $\mathbb{C}$.

Dann gilt mit Satz 12.8.12 (Anzahlformel), dass $\displaystyle\oint_{\partial M} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i.$

2. Ansatz: Die Funktion g, definiert durch $g(z) := \frac{4z^3 - 6z^2 + 6z - 2}{f(z)}$, ist holomorph auf $\tilde{M} \backslash \{-i, 1 - i\}$, wobei

$$\tilde{M} := \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| + |z - 1 + i| < 2\sqrt{3}\} \supset M.$$

Weiterhin hat die Funktion f nur die beiden Nullstellen $-i$ und $1 - i$ in $\tilde{M}$, welches damit Polstellen erster Ordnung von g sind. Dann gilt mit dem Residuensatz 12.8.3:

$$\oint_{\partial M} \frac{4z^3 - 6z^2 + 6z - 2}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot (\mathrm{Res}(g, -i) + \mathrm{Res}(g, 1 - i)).$$

Für die Residuen gilt weiterhin mit Lemma 12.8.4:

$$\mathrm{Res}(g, -i) = \lim_{z \to -i} [(z + i)g(z)] = \frac{-4i^3 - 6i^2 - 6i - 2}{-2i(-1 - 2i)(-1)} = \frac{2(2 - i)}{2(2 - i)} = 1$$

$$\mathrm{Res}(g, 1 - i) = \lim_{z \to 1 - i} [(z - 1 + i)g(z)] = \frac{4(1 - i)^3 - 6(1 - i)^2 + 6(1 - i) - 2}{(1 - 2i)(1)(-2i)} = \frac{-2(2 + i)}{-2(2 + i)} = 1.$$

Insgesamt folgt daher $\displaystyle\oint_{\partial M} \frac{4z^3 - 6z^2 + 6z - 2}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot (1 + 1) = 4\pi i.$

Aufgabe 3

Berechnen Sie mithilfe des Residuensatzes das komplexe Kurvenintegral $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(1-z^2)^5}$.

Lösung

Sei die Funktion f definiert durch $f(z) := \frac{1}{z^3(1-z^2)^5}$.
f hat einen Pol dritter Ordnung in $z_1 := 0$ und Pole fünfter Ordnung in $z_{2/3} := \pm 1$.
Nun ist $z_1 \in M := \{z \,:\, |z| < 1/2\}$ und $z_{2/3} \notin \overline{M}$.

Mithilfe der geometrischen Reihe lässt sich f schreiben als

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z^3\left(1-z^2\right)^5} = \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{1-z^2}\right)^5 &\overset{|z^2|<1}{=\!=} \frac{1}{z^3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(z^2)^k\right)^5 \\ &= \frac{1}{z^3}\left(1+5z^2+\mathcal{O}(z^4)\right) = \frac{1}{z^3} + 5\frac{1}{z^1} + \mathcal{O}(z). \end{aligned}$$

Durch ablesen erhält man $\operatorname{Res}(f,0) = 5$.

Mit dem Residuensatz folgt, dass

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(1-z^2)^5} = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) = 10\pi i.$$

<u>Alternative Lösung:</u>

Sei die Funktion f definiert durch $f(z) := \frac{1}{z^3(1-z^2)^5}$.
f hat einen Pol dritter Ordnung in $z_1 := 0$ und Pole fünfter Ordnung in $z_{2/3} := \pm 1$.
Nun ist $z_1 \in M := \{z \,:\, |z| < 1/2\}$ und $z_{2/3} \notin \overline{M}$.

Mit dem Residuensatz gilt nun, dass

$$\begin{aligned} \oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(1-z^2)^5} &= 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) \\ &= 2\pi i \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[f(z)z^3\right]\right) \\ &= 2\pi i \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\frac{1}{(1-z^2)^5}\right]\right) \\ &= \pi i \lim_{z\to 0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{10z}{(1-z^2)^6}\right]\right) \\ &= \pi i \lim_{z\to 0}\left(\frac{10(1-z^2)+120z^2}{(1-z^2)^7}\right) \\ &= 10\pi i. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Es bezeichne für festes $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}_n := \left\{ p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, t^k, \quad a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge der Polynome vom Grad $\leq n$. Dann ist $\big(\mathcal{P}_n, \|\cdot\|\big)$ vermöge der Norm $\|p\| := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ ein normierter Raum. (Das sollen Sie **nicht** zeigen!)

Zeigen oder widerlegen Sie: Der normierte Raum $\big(\mathcal{P}_n, \|\cdot\|\big)$ ist vollständig.

Lösung

Behauptung: $(\mathcal{P}_n, \|\cdot\|)$ ist vollständig.

Sei $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_n$ eine Cauchy–Folge. Das heißt, es existieren zu jedem $m \in \mathbb{N}$ Koeffizienten $a_{k,m} \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$, so dass $p_m(t) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,m} t^k$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aus der Cauchyfolgeneigenschaft folgt, dass zu jeden $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\|p_j - p_l\| = \sum_{k=0}^{n} |a_{k,j} - a_{k,l}| < \varepsilon$$

für alle $j, l \geq N$.

Daraus folgt insbesondere

$$\varepsilon > \sum_{k=0}^{n} |a_{k,j} - a_{k,l}| \geq |a_{\tilde{k},j} - a_{\tilde{k},l}|$$

für alle $j, l \geq N$ und jedes feste $\tilde{k} \in \{0, \ldots, n\}$.

Daher ist $\{a_{\tilde{k},m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ für jedes feste $\tilde{k} \in \{0, \ldots, n\}$ eine Cauchy–Folge.

Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ liefert die Existenz einer reellen Zahl $a_{\tilde{k}}$, so dass

$$|a_{\tilde{k},m} - a_{\tilde{k}}| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Definiere nun $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ p(t) := \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$. Dann gilt $p \in \mathcal{P}_n$ und

$$\|p_m - p\| = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{|a_{k,m} - a_k|}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} 0\ \forall k} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Es folgt die Vollständigkeit.

Aufgabe 5

Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $(C([0,2]), \|\cdot\|_\infty)$ der Raum der stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm $\|x\|_\infty := \sup_{t\in[0,2]}\big|x(t)\big|$ und $(C^1([0,2]), \|\cdot\|_{C^1})$ mit der C^1–Norm $\|x\|_{C^1} := \max\big\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\big\}$ der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0,2]$, wobei x' die Ableitung von x bezeichnet.

Wir definieren den Operator

$$T\colon \Big(C^1\big([0,2]\big),\ \|\cdot\|_{C^1}\Big) \longrightarrow \mathbb{K},\ Tx := x'(0) + x(1) - x'(2).$$

Zeigen Sie: $T \in \mathcal{L}\Big(\big(C^1\big([0,2]\big),\ \|\cdot\|_{C^1}\big),\ \mathbb{K}\Big)$ mit $\|T\| = 3$.

Lösung

Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x_1, x_2 \in C^1([0,2])$. Dann folgt

$$\begin{aligned}T(\alpha x_1 + x_2) &= (\alpha x_1 + x_2)'(0) + (\alpha x_1 + x_2)(1) - (\alpha x_1 + x_2)'(2)\\ &= \alpha x_1'(0) + \alpha x_1(1) - \alpha x_1'(2) + x_2'(0) + x_2(1) - x_2'(2)\\ &= \alpha T(x_1) + T(x_2).\end{aligned}$$

Es folgt die $\mathbb{K}$–Linearität von T.

Sei nun $x \in C^1([0,2])$ mit $x \neq 0$. Dann folgt

$$|Tx| = |x'(0) + x(1) - x'(2)| \overset{\Delta\text{–Ungl.}}{\leq} |x'(0)| + |x(1)| + |x'(2)| \leq 3 \cdot \max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\} = 3 \cdot \|x\|_{C^1}.$$

Teilen durch $\|x\|_{C^1}$ und Übergang zum Supremum auf der linken Seite liefert

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|Tx|}{\|x\|_{C^1}} \leq 3.$$

Zur anderen Ungleichung: Wir möchten ein $x_0 \in C^1([0,2])$ konstruieren,
so dass $|T(x_0)| = 3$ und $\|x_0\|_{C^1} \leq 1$, um dann die Beziehung

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in C^1([0,2])\\ \|x\|_{C^1}\leq 1}} |T(x)| \geq |T(x_0)| = 3$$

auszunutzen. Finde also eine $C^1([0,2])$–Funktion mit $x_0(1) = 1$, $x_0'(0) = 1$ und $x_0'(2) = -1$.
Definiere $x_0'(t) := -t + 1$ für $t \in [0,2]$. Dann ist x_0' stetig und erfüllt obige Randbedingungen.
Es folgt $x_0(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + c$ für $c \in \mathbb{R}$. $x_0(1) = 1$ liefert $c = \frac{1}{2}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\|x_0\|_\infty &= \max_{t\in[0,2]} \left|-\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}\right| = \max_{t\in[0,2]} \left|-\frac{1}{2}(t-1)^2 + 1\right| = 1\\ \|x_0'\|_\infty &= \max_{t\in[0,2]} |-t+1| = 1.\end{aligned}$$

Das heißt, es liegt bereits $\|x_0\|_{C^1} \leq 1$ vor und die Behauptung folgt.

Aufgabe 6

Sei $V = \ell^2 = \left\{ x = \left(\xi_j\right)_{j\in\mathbb{N}} : \ \xi_j \in \mathbb{C} \ \text{ und } \ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^2 < \infty \right\}$ der Hilbertraum der quadratsummierbaren Folgen mit Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\xi}_j \cdot \nu_j \quad \text{für} \quad x = \left(\xi_j\right)_{j\in\mathbb{N}}, \ y = \left(\nu_j\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2 .$$

Des Weiteren sei $e_k = \big(0, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{–te Stelle}}}{1}, 0, \ldots\big) \in \ell^2$

der k–te Einheitsvektor aus ℓ^2. $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichne also die Standard–Orthonormalbasis von ℓ^2.

Man zeige:

(a) Die Einheitskugel $B := \{x \in \ell^2 \colon \|x\| \le 1\}$ ist eine abgeschlossene Menge in ℓ^2.

(b) Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B \subset \ell^2$ mit $x_k := e_k$ ist **keine** Cauchy–Folge in ℓ^2.

(c) Die Einheitskugel B ist – trotz ihrer Abgeschlossenheit und Beschränktheit – **nicht** folgenkompakt.

(d) Die Identitätsabbildung $\mathrm{Id}\colon \ell^2 \to \ell^2, \ x \mapsto x$, ist **kein** kompakter Operator.

Lösung

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ in ℓ^2.
Wegen $\|x_n\| \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der Stetigkeit der Norm folgt

$$\|x\| = \|\lim_{n\to\infty} x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \le \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Daher ist x in B enthalten und demnach B abgeschlossen.

(b) Sei $i, j \in \mathbb{N}$ beliebig mit $i \ne j$.
Es gilt

$$\|x_i - x_j\| = \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}.$$

Daraus folgt bereits, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge sein kann.

(c) Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus dem zweiten Aufgabenteil ist in B enthalten. Weiter gilt

$$\|x_i - x_j\| = \sqrt{2} \quad \text{(oder anderes passendes Beispiel)},$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \ne j$. Daher besitzt $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist und demnach auch **keine konvergente Teilfolge**. Hieraus folgt, dass B nicht folgenkompakt ist.

(d) Da B abgeschlossen ist, gilt

$$\overline{\mathrm{Id}(B)} = \overline{B} = B.$$

Daher ist mit dem dritten Aufgabenteil $\overline{\mathrm{Id}(B)}$ nicht kompakt.
Weil B eine beschränkte Menge ist und jeder **kompakte Operator** beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet, folgt, dass $\mathrm{Id}\colon \ell^2 \to \ell^2$ kein kompakter Operator ist.