RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 109

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
Fax: +49 241 80 92323
maier@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de/maier

B. Sc. 17.02.2017
SoSe 2016

Klausur: Höhere Mathematik IV (Physiker)

Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1

Gegeben sei $H\colon \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| \neq 1\right\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$H(z) := \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{|w|=1} \frac{1}{w(w-z)}\,\mathrm{d}w \quad \text{für} \quad |z| \neq 1\,.$$

(a) Geben Sie $H(z)$ für $|z| \neq 1$ integralfrei an.

(b) Ist H holomorph fortsetzbar auf $\mathbb{C}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Nutzen Sie z.B. Partialbruchzerlegung für $z \neq 0$ fest.

Lösung

(a) **<u>Für $z \neq 0$</u>** gilt die Partialbruchzerlegung $\dfrac{1}{w(w-z)} = \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{-1}{w} + \dfrac{1}{w-z}\right)$ für $w \neq 0, w \neq z$.

Damit erhält man für $z \neq 0$: $H(z) = \dfrac{1}{2\pi i \cdot z} \cdot \left[\oint_{|w|=1} \dfrac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w - \oint_{|w|=1} \dfrac{1}{w}\,\mathrm{d}w\right]$.

Der zweite Integrant steht hier bereits als Laurentreihe um den Entwicklungspunkt 0, dessen Singularität, und der erste Integrant als Laurentreihe um den Entwicklungspunkt z, ebenfalls dessen Singularität. Das Residuum der beiden Integranten um deren jeweilige Polstelle ist in beiden Fällen also 1.

Da weiterhin die Kurve $\Gamma = \{|w| = 1\}$ als Kreisrand einfach geschlossen, regulär und positiv orientiert ist, gilt:

Die einzige Polstelle von $1/w$, die 0, liegt im Inneren von Γ, weshalb aus dem Residuensatz $\oint_{|w|=1} \dfrac{1}{w}\,\mathrm{d}w = 2\pi i$ folgt.

Weiterhin liegt <u>für $|z| < 1$</u> die einzige Polstelle von $1/(w-z)$ ebenfalls im Inneren von Γ. Damit ergibt auch das erste Integral $2\pi i$ und es gilt daher mit dem Residuensatz

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i \cdot z} \cdot \left[\oint_{|w|=1} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w - \oint_{|w|=1} \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w\right] = \frac{1}{2\pi i \cdot z} \cdot (2\pi i - 2\pi i) = 0 \qquad \text{für } 0 < |z| < 1.$$

<u>Für $|z| > 1$</u> liegt die einzige Polstelle von $1/(w-z)$ nicht im Inneren von Γ, sodass $1/(w-z)$ in einer genügend kleinen offenen Kugel mit Radius > 1 um die 0 holomorph ist. Da trivialerweise dann das Innere von Γ und Γ selbst ganz in dieser größeren Kugel enthalten ist, gilt mit dem Satz von Cauchy und dem bereits Gefundenen

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i \cdot z} \cdot \left[\oint_{|w|=1} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w - \oint_{|w|=1} \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w\right] = \frac{1}{2\pi i \cdot z} \cdot (0 - 2\pi i) = -\frac{1}{z} \qquad \text{für } |z| > 1.$$

<u>Für $z = 0$</u> ist $1/w^2$ bereits Laurentreihe um den Entwicklungspunkt 0 und daher das Residuum dort 0 und es folgt mit dem Residuensatz $H(0) = \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{|w|=1} \dfrac{1}{w^2}\,\mathrm{d}w = 0$.

Insgesamt ist damit $H(z)$ gegeben durch: $H(z) = \begin{cases} 0 & |z| < 1 \\ -z^{-1} & |z| > 1 \end{cases}$.

(b) Da $|-1/z| \to 1$ für $|z| \to 1$ ist H nicht stetig fortsetzbar auf $|z| = 1$.
Damit ist es insbesondere nicht holomorph fortsetzbar.

Aufgabe 2
Berechnen Sie mithilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x\,+\,2}{x^5+2x^4+4x+8}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung
Wir definieren $f(x) := x^5+2x^4+4x+8$, dann ist $f(-2)=0$, d.h. f besitzt eine Nullstelle bei $x=-2$. Eine Polynomdivision ergibt $g(x) := f(x)/(x+2) = x^4+4$ und das Integral lässt sich umformen zu

$$I := \int_0^\infty \frac{x+2}{x^5+2x^4+4x+8}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{x^4+4}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Symmetrie}}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+4}\,\mathrm{d}x.$$

Mit dem Ansatz $z = re^{\phi i}$ für $r>0$ und $\phi \in [0,2\pi)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} g(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 &= -4 \\ \Leftrightarrow r^4e^{4\phi i} &= 4e^{\pi i} \\ \Leftrightarrow r = \sqrt{2} \quad &\wedge \quad 4\phi = (1+2k)\pi \quad ,k\in\mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow r = \sqrt{2} \quad &\wedge \quad \phi = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}k\right)\pi \quad ,k\in\{0,1,2,3\} \quad (\text{da } \phi\in[0,2\pi)). \end{aligned}$$

Die Nullstellen von g sind somit gegeben durch $z_k := \sqrt{2}e^{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}k\right)\pi i}, k\in\{0,1,2,3\}$.
Sei nun $R>\sqrt{2}$ und $\phi\in[0,\pi]$, dann gilt für $\tilde{g}(z) := \frac{1}{g(z)}$

$$\begin{aligned} R\left|\tilde{g}(Re^{\phi i})\right| &= \frac{R}{|R^4e^{4\phi i}+4|} \\ &= \frac{R}{|R^4\left(\cos(4\phi)+i\sin(4\phi)\right)+4|} \\ &= \frac{R}{\left(R^4\cos(4\phi)+4\right)^2+R^8\sin^2(4\phi)} \\ &= \frac{R}{R^8+8R^4\cos(4\phi)+16} \\ &\le \frac{R}{R^8-8R^4+16} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Weiter ist $\tilde{g}$ holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{z_0,z_1,z_2,z_3\}$ und es folgt mit Satz 12.8.7

$$I = \pi i\left(\operatorname{Res}(\tilde{g},z_0)+\operatorname{Res}(\tilde{g},z_1)\right).$$

Wegen $z_0=-z_2$,$z_1=-z_3$ und $z_0^2=-z_1^2$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(\tilde{g},z_0) = \lim_{z\to z_0}\tilde{g}(z)(z-z_0) = \frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} = \frac{1}{2z_0(z_0^2-z_1^2)} = \frac{1}{8\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}} &= \frac{1}{-8+8i} \\ &= -\frac{1+i}{16} \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{Res}(\tilde{g},z_1) = \lim_{z\to z_1}\tilde{g}(z)(z-z_1) = \frac{1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)} = \frac{1}{2z_1(z_1^2-z_0^2)} = \frac{1}{8\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}} = \frac{1}{8+8i} = \frac{1-i}{16}.$$

Insgesamt folgt

$$I = \pi i\left(-\frac{1+i}{16}+\frac{1-i}{16}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Aufgabe 3
Ein Kohlekraftwerk speist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% innerhalb von 100 Tagen mehr als 500 GWh ins Netz ein.
Im Mittelwert liefert es 533 GWh auf 100 Tage. Wie hoch sind Mittelwert und Standardabweichung der täglichen Einspeisung, wenn man davon ausgeht, dass die täglichen Werte stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind?

Hinweis: $\Phi(1{,}65) \approx 95\%$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Lösung
Für den Tag i, $i \in \mathbb{N}$, werde die Netzeinspeisung durch die Zufallsvariable X_i beschrieben, wobei X_i, $i \in \mathbb{N}$, stochastisch unabhängig und identisch verteilt (iid.) sind.
Die Netzeinspeisung nach N Tagen sei gegeben durch die Zufallsvariable $S_N := \sum_{i=1}^N X_i$.
Bekannt ist

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_{100} > 500\,\mathrm{GWh}) &= 95\%, \\ \mathrm{E}(S_{100}) &= 533\,\mathrm{GWh}. \end{aligned}$$

Gesucht sind $\mu := \mathrm{E}(X_i)$ und $\sigma := \mathrm{Var}(X_i)$.

Da die täglichen Einspeisungen iid. sind, ist $\mathrm{E}(S_N) = N \cdot \mu$ und daher $\mu = \mathrm{E}(S_{100})/100 = 5{,}33\,\mathrm{GWh}$.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} 95\% = \mathrm{P}(S_{100} > 500\,\mathrm{GWh}) \quad &\Leftrightarrow \quad 95\% = 1 - \mathrm{P}(S_{100} \leq 500\,\mathrm{GWh}) \\ &\Leftrightarrow \quad 95\% = 1 - \mathrm{P}\left(\frac{S_{100} - 100 \cdot \mu}{\sqrt{100} \cdot \sigma} \leq \frac{500\,\mathrm{GWh} - 100 \cdot \mu}{\sqrt{100} \cdot \sigma}\right). \end{aligned}$$

Mit dem zentralen Grenzwertsatz folgt

$$95\% \approx 1 - \Phi\left(\frac{500\,\mathrm{GWh} - 100 \cdot \mu}{\sqrt{100} \cdot \sigma}\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bzw. die Gaußsche Fehlerfunktion ist.

Aus Symmetriegründen gilt $1 - \Phi(t) = \Phi(-t)$ und daher $\Phi\left(-\frac{500\,\mathrm{GWh} - 100 \cdot \mu}{\sqrt{100} \cdot \sigma}\right) \approx 95\%$.

Aus dem Hinweis folgt, dass

$$\begin{aligned} 1{,}65 &\approx -\frac{500\,\mathrm{GWh} - 100 \cdot \mu}{\sqrt{100} \cdot \sigma} \\ \Leftrightarrow \qquad \sigma &\approx -\frac{500\,\mathrm{GWh} - 100 \cdot \mu}{\sqrt{100} \cdot 1{,}65} = -\frac{50 - 53}{1{,}65}\,\mathrm{GWh} = 2\,\mathrm{GWh}. \end{aligned}$$

Die tägliche Einspeisung ist im Mittel 5,33 GWh mit einer Standardabweichung von etwa 2 GWh.

Aufgabe 4

Sei $\widetilde{H}^1\big((0,\pi)\big)$ der Sobolevraum der einmal schwach differenzierbaren Funktion auf $(0,\pi)$ bezüglich des VONS

$$\widehat{\mathbf{e}}_k(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin(k\cdot x)\,,\quad x\in(0,\pi)\,,\quad k\in\mathbb{N}\,.$$

Für $u\in\widetilde{H}^1\big((0,\pi)\big)$ sei $\mathcal{P}_N u=\sum\limits_{k=1}^{N}\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k,u\,\rangle\cdot\widehat{\mathbf{e}}_k$ die orthogonale Projektion auf span$\{\,\widehat{\mathbf{e}}_1,\dots,\widehat{\mathbf{e}}_N\}$.

Zeigen Sie für $N\in\mathbb{N}$ fest:

(a) $\big\|u\,-\,\mathcal{P}_N u\big\|^2_{L^2\left((0,\pi)\right)} \;=\; \sum\limits_{K=N+1}^{\infty}\big|\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k\,,\,u\,\rangle\big|^2,$

(b) $\big\|u'\big\|^2_{L^2\left((0,\pi)\right)} \;=\; \sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2\big|\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k\,,\,u\,\rangle\big|^2,$

(c) $\big\|u\,-\,\mathcal{P}_N u\big\|_{L^2\left((0,\pi)\right)} \;\le\; \dfrac{1}{N+1}\,\|u'\|_{L^2\left((0,\pi)\right)}\,.$

Lösung

(a) Für $u\in\widetilde{H}^1((0,\pi))\subset L^2((0,\pi))$ gilt

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k,u\rangle\cdot\widehat{\mathbf{e}}_k,$$

mit Konvergenz in $L^2((0,\pi))$.
Daher folgt mit der Parseval-Gleichung für festes $N\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|u-\mathcal{P}_N u\|^2_{L^2((0,\pi))} &= \Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k,u\rangle\cdot\widehat{\mathbf{e}}_k-\sum_{k=1}^{N}\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k,u\rangle\cdot\widehat{\mathbf{e}}_k\Big\|^2_{L^2((0,\pi))}\\
&= \Big\|\sum_{k=N+1}^{\infty}\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k,u\rangle\cdot\widehat{\mathbf{e}}_k\Big\|^2_{L^2((0,\pi))}\\
&= \Big\langle\sum_{k=N+1}^{\infty}\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k,u\rangle\cdot\widehat{\mathbf{e}}_k,\;\sum_{l=N+1}^{\infty}\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_l,u\rangle\cdot\widehat{\mathbf{e}}_l\Big\rangle_{L^2((0,\pi))}\\
&= \sum_{k=N+1}^{\infty}\overline{\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k,u\rangle}\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k,u\rangle\\
&= \sum_{k=N+1}^{\infty}|\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k,u\rangle|^2,
\end{aligned}$$

wegen der Orthonormalität der $(\widehat{\mathbf{e}}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(b) Nach Definition ist

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \lim_{N\to\infty}\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{N}\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k,u\rangle\cdot\widehat{\mathbf{e}}_k(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k,u\rangle\cdot\frac{d}{dx}\Big(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)\Big)\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k,u\rangle\cdot k\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(kx)=\sum_{k=1}^{\infty}\langle\,\widehat{\mathbf{e}}_k,u\rangle\cdot k\cdot\widehat{\mathbf{g}}_k(x),
\end{aligned}$$

mit $\widehat{\mathbf{g}}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(kx)$. Es ist bekannt, dass die $\widehat{\mathbf{g}}_k$, $k \in \mathbb{N}$, (mit $\widehat{\mathbf{g}}_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$) ein (vollständiges) ONS in $L^2((0,\pi))$ sind.
Wegen

$$\langle u', \widehat{\mathbf{g}}_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle \widehat{\mathbf{e}}_k, u \rangle \cdot k \cdot \widehat{\mathbf{g}}_k, \widehat{\mathbf{g}}_j \Big\rangle = \langle \widehat{\mathbf{e}}_j, u \rangle \cdot j,$$

folgt mit der Parseval-Gleichung

$$\|u'\|^2_{L^2((0,\pi))} = \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle \widehat{\mathbf{e}}_k, u \rangle \cdot k \cdot \widehat{\mathbf{g}}_k \Big\|^2_{L^2((0,\pi))} = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \widehat{\mathbf{e}}_k, u \rangle|^2 \cdot k^2.$$

(c) Mit Aufgabenteil **(a)** und **(b)** ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|u - \mathcal{P}_N u\|^2_{L^2((0,\pi))} &= \sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle \widehat{\mathbf{e}}_k, u \rangle|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2} |\langle \widehat{\mathbf{e}}_k, u \rangle|^2 \\
&\le \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} k^2 |\langle \widehat{\mathbf{e}}_k, u \rangle|^2 \le \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\langle \widehat{\mathbf{e}}_k, u \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{(N+1)^2} \|u'\|^2_{L^2((0,\pi))}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\|u - \mathcal{P}_N u\|_{L^2((0,\pi))} \le \frac{1}{(N+1)} \|u'\|_{L^2((0,\pi))}.$$

Aufgabe 5

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und

$$V := L^2(G) = \left\{ f\colon G \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ ist Lebesgue–integrierbar und } \int_G \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

sei der Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_G \overline{f(x)} \cdot g(x) \,\mathrm{d}x \quad \text{für} \quad f, g \in L^2(G)\,.$$

Des Weiteren sei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem (Orthonormalbasis) von $L^2(G)$.

Man zeige:

(a) Die Einheitskugel $B := \{f \in L^2(G)\colon \|f\| \leq 1\}$ ist eine abgeschlossene Menge in $L^2(G)$.

(b) Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B \subset L^2(G)$ mit $f_k := e_k$ ist **keine** Cauchy–Folge in $L^2(G)$.

(c) Die Einheitskugel B ist – trotz ihrer Abgeschlossenheit und Beschränktheit – **nicht** folgenkompakt.

(d) Die Identitätsabbildung $\mathrm{Id}\colon L^2(G) \to L^2(G),\ f \mapsto f$, ist **kein** kompakter Operator.

Lösung

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^2(G)$.
Wegen $\|f_n\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der Stetigkeit der Norm folgt

$$\|f\| = \|\lim_{n\to\infty} f_n\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\| \leq \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Daher ist f in B enthalten und demnach B abgeschlossen.

(b) Sei $i, j \in \mathbb{N}$ beliebig mit $i \neq j$.
Es gilt

$$\|f_i - f_j\| = \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}.$$

Daraus folgt bereits, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge sein kann.

(c) Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus dem zweiten Aufgabenteil ist in B enthalten. Weiter gilt

$$\|f_i - f_j\| = \sqrt{2} \quad \text{(oder anderes passendes Beispiel)},$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$. Daher besitzt $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist und demnach auch **keine konvergente Teilfolge**. Hieraus folgt, dass B nicht folgenkompakt ist.

(d) Da B abgeschlossen ist, gilt

$$\overline{\mathrm{Id}(B)} = \overline{B} = B.$$

Daher ist mit dem dritten Aufgabenteil $\overline{\mathrm{Id}(B)}$ nicht kompakt.
Weil B eine beschränkte Menge ist und jeder **kompakte Operator** beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet, folgt, dass $\mathrm{Id}\colon L^2(G) \to L^2(G)$ kein kompakter Operator ist.