RWTH AACHEN

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
maier@instmath.rwth-aachen.de

B. Sc.
SoSe 2020

Klausur: Höhere Mathematik IV

04.08.2020
Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie eine Möbius–Transformation der Form

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad z \in \widehat{\mathbb{C}},$$

so dass $f(i) = 0$, $f(0) = 2$ und $f(2i) = \infty$.

(b) Was ist $f^{-1}(3+i)$?

(c) Bestimmen Sie $f(Q)$, wobei Q den rechten oberen Quadranten

$$Q = \Big\{ z \in \mathbb{C} \;\Big|\; \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0 \Big\}$$

bezeichnet, und skizzieren Sie $f(Q)$.

Lösung

(a) Aus $f(i) = 0$ und $f(2i) = \infty$ folgt

$$b = -ai, \quad d = -2ic,$$

also

$$f(z) = \frac{a(z-i)}{c(z-2i)}.$$

Aus $f(0) = 2$ wiederum $a = 4c$.
Insgesamt ist

$$f(z) = \frac{4(z-i)}{z-2i}.$$

(b) Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$f^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a} = \frac{-2iw+4i}{-w+4}.$$

Einsetzen ergibt direkt

$$f^{-1}(3+i) = \frac{2-2i}{1-i} = 2.$$

(c) Zunächst gilt für die Möbius-Transformation f, dass Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden abgebildet werden.
Wegen $0, i, 2i \in i\mathbb{R}$ und $2, 0, \infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, folgt bereits

$$f(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Genauer ist wegen

$$f(iy) = \frac{4(y-1)}{y-2} \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} 4$$

und $f(2i) = \infty$, $f(3i) = 8$

$$f(\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) > 2i\}) = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \in (4, \infty)\}.$$

Weiter ist wegen $f(i) = 0$, $f(0) = 2$ und $f(2i) = \infty$

$$f(\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) \in (0, 2)\}) = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \in (-\infty, 2)\}.$$

Insgesamt also

$$f(\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) \in (0, \infty) \setminus \{2\}\}) = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty), \operatorname{Im}(z) = 0\} =: M_1.$$

Berechne nun $f(\mathbb{R})$. Es gilt $0, 2 \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 2$, $f(2) = 3 + i$. Wegen $f(iy) \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} 4$, folgt

$$f(\infty) = 4,$$

sodass $f(\mathbb{R})$ ein Kreis sein muss.
Wegen $|2 - 3| = |(3 + i) - 3| = |4 - 3| = 1$, folgt

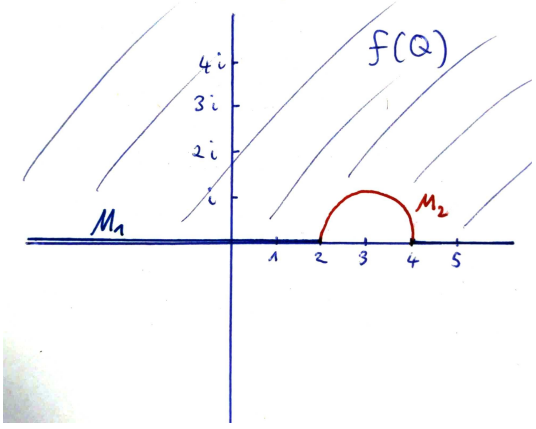
$$f(\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) > 0\}) = \{z = x + iy \in \mathbb{C} | (x-3)^2 + y^2 = 1, y > 0\} =: M_2.$$

$f(Q)$ ist berandet von M_1 und M_2. Setze einen inneren Punkt von Q ein für das genaue Abbildungsverhalten:

$$f(1 + i) = 2 + 2i$$

hat liegt oberhalb von $M_1 \cup M_2$. Damit ist

$$f(Q) = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\} \setminus B_1(3).$$



Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $F\colon \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z+i| \neq 1\right\} \longrightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$F(z) := \oint\limits_{|w-i|=1} \frac{w^2 \exp(w)}{(w+z)^2}\, dw\,.$$

Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel berechne man $F'(1)$ und $F'(-i)$.

Lösung

Sei Γ die positiv orientierte Kurve $\{|w-i| = 1\}$. Dann ist Γ geschlossen und regulär in $\mathbb{C}$.
Definiere

$$\tilde{F}(z) := F(-z).$$

Dann ist nach Voraussetzung

$$\tilde{F}(z) = F(-z) = \oint\limits_{|w-i|=1} \frac{w^2 \exp(w)}{(w-z)^2}\, dw$$

und $\tilde{F}'(z) = -F'(-z)$ für alle $\left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-i| \neq 1\right\}$.
Zu $F'(1) = -\tilde{F}'(-1)$:
Da $\operatorname{dist}(-1, i) = |-1-i| = \sqrt{2} > 1$ existieren $\alpha > 1$ und $0 < \beta < 1$ mit $\alpha + \beta < \sqrt{2}$ und

$$\Gamma \subset A := \{w \in \mathbb{C} : |w-i| < \alpha\} = B_\alpha(i), \quad -1 \in B := \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < \beta\} = B_\beta(-1),$$

sodass $A \cap B = \emptyset$. Weiterhin ist die Abbildung

$$w \mapsto \frac{w^2 \exp(w)}{(w-z)^2}$$

holomorph für $w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq z$. Wegen $A \cap B = \emptyset$ ist ist sie damit für jedes $z \in B$ fest holomorph für alle $w \in A$ und A ist zudem ein Gebiet.
Insgesamt ist also Γ eine geschlossene reguläre Kurve in $\mathbb{C}$, die selbst und dessen Innengebiet ganz in dem Gebiet A enthalten sind, auf welchem der Integrand holomorph ist. Nach dem Satz von Cauchy ist damit jedoch das gesamte Kurvenintegral 0, sodass $\tilde{F}(z) = 0$ für alle $z \in B$. Da B eine Umgebung von -1 ist, ist demnach $\tilde{F}'(-1) = 0 = F'(1)$.
Zu $F'(-i)$:
Nach Voraussetzung wird Γ positiv durchlaufen, und $f(w) := w^2 \exp(w)$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$. Damit ist nach der Cauchyschen Integralformel bzw. genauer mit der Folgerung 12.5.13:

$$\tilde{F}(z) = 2\pi i \cdot f'(z)$$

für alle $z \in \Sigma$, wobei Σ das Innengebiet von Γ bezeichne.
Damit ist

$$\tilde{F}'(z) = 2\pi i \cdot f''(z) = 2\pi i \cdot \left[(2w + w^2)\exp(w)\right]'_{w=z} = 2\pi i \cdot (2 + 4z + z^2)\exp(z).$$

Da offensichtlich $i \in \Sigma$, gilt

$$F'(-i) = -\tilde{F}'(i) = -2\pi i \cdot \exp(i)(4i+1) = 2\pi \exp(i)(4-i).$$

Aufgabe 3

Sind folgende Aussagen **wahr** oder **falsch**?

Geben Sie eine kurze Begründung, bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) Seien X_j, $j \in \mathbb{N}$, stochastisch unabhängige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ mit Erwartungswert $E(X_j) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_j) = \sigma^2$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$E\left(X_1 \cdot X_2 + X_3^2\right) = E\left(X_1\right) \cdot E\left(X_2\right) + \left[E\left(X_3\right)\right]^2$$

(b) Polynome $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$ mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{C},\ j = 0, \ldots, m$, sind in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ (komplex) analytisch und in jedem $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ reell analytisch.

(c) Für die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{aligned}$$

gilt für jede Nullfolge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dass $\left|f\left(z_n\right)\right| \longrightarrow \infty \ \ (n \to \infty)$.

Hinweis: zu erkennen, ob die Aussage **wahr** oder **falsch** ist, ist nur eine notwendige Bedingung um Punkte zu erhalten, aber nicht hinreichend.

Lösung

(a) Die Aussage ist **falsch**.
Für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 gilt zwar

$$E\left(X_1 \cdot X_2 + X_3^2\right) = E\left(X_1\right) \cdot E\left(X_2\right) + E\left(X_3^2\right),$$

für $\sigma \neq 0$ gilt jedoch

$$\mathrm{Var}\left(X_3\right) \neq 0 \Longleftrightarrow E\left(X_3^2\right) \neq \left[E\left(X_3\right)\right]^2.$$

(b) Die Aussage ist **falsch**.
Beispielsweise ist das Polynom $p(z) = z + i$ zwar für alle $z \in \mathbb{C}$ komplex analytisch, jedoch für kein $z \in \mathbb{R}$ reell analytisch.

Alternative: Für jedes Polynom bei dem auch nur ein Koeffizient $a_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist, ist die Einschränkung $p_{|\mathbb{R}}$ keine Abbildung von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kann also nicht reell analytisch sein.

(c) Die Aussage ist **falsch**.
Betrachte beispielsweise die Nullfolge definiert durch $z_n := \frac{i}{n}$. Dann gilt

$$f(z_n) = e^{-n^2} \longrightarrow 0 \ \ (n \to \infty).$$

Aufgabe 4
Gegeben sei ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in G$ und $f\colon\ G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G.
Des Weiteren sei $R \in \mathbb{R}$ mit $R > 0$ fest gewählt, so dass $\overline{B_R(z_0)} \subset G$. Zeigen Sie

$$f(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\big(z_0 + R\mathrm{e}^{it}\big)\; dt\,,$$

indem Sie die rechte Seite als komplexes Integral schreiben.

Lösung
1. Alternative: Sei Γ die Kurve, die durch $[0, 2\pi] \ni t \mapsto \gamma(t) := z_0 + Re^{it}$ gegeben ist.
Dann ist Γ nach Vorlesung einfach geschlossen, regulär und positiv orientiert.
Weiter gilt nach Voraussetzung, dass Innengebiet$(\Gamma) \cup \Gamma = \overline{B_R(z_0)} \subset G$ und f ist auf G holomorph.
Daher sind die Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel Satz 12.5.12 erfüllt und es folgt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + Re^{it}\right)}{z_0 + Re^{it} - z_0} Rie^{it}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{it}\right)\,\mathrm{d}t.$$

2. Alternative: Sei Γ die Kurve, die durch $[0, 2\pi] \ni t \mapsto \gamma(t) := z_0 + Re^{it}$ gegeben ist.
Dann ist Γ nach Vorlesung einfach geschlossen, regulär und positiv orientiert.
Weiter gilt nach Voraussetzung, dass Innengebiet$(\Gamma) \cup \Gamma = \overline{B_R(z_0)} \subset G$ und f ist auf G holomorph.
Daher sind die Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel Satz 12.5.12 erfüllt und es folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{it}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)i}\,\mathrm{d}z = f(z_0)$$

3. Alternative: Es sei Γ die Kurve, die durch die Parametrisierung $[0, 2\pi] \ni t \mapsto \gamma(t) := Re^{it}$ gegeben ist.
Dann ist Γ nach Vorlesung einfach geschlossen, regulär und positiv orientiert.
Sei $G' := \{z - z_0 : z \in G\}$. Dann Innengebiet$(\Gamma) \cup \Gamma = \overline{B_R(0)} \subset G'$ und $z \mapsto f(z + z_0)$ ist auf G' holomorph.
Daher sind die Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel Satz 12.5.12 erfüllt und es folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{it}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma \frac{f(z + z_0)}{iz}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z + z_0)}{z - 0}\,\mathrm{d}z = f(z_0)$$

4. Alternative: Sei $G' := \{z - z_0 : z \in G\}$, Γ durch $[0, 2\pi] \ni t \mapsto \gamma(t) := Re^{it}$ gegeb.,
$g : G' \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ g(z) := \frac{f(z+z_0)}{z}$.
Dann ist $\{0\} \subset$ Innengebiet$(\Gamma) \subset G'$, Γ einfach geschlossen, regulär, positiv orientiert und g holomorph.
Dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{it}\right)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma \frac{f\left(z + z_0\right)}{iz}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname{Res}(g, 0) \\
&= \lim_{z \to 0} z \cdot g(z) \\
&= f(z_0)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Es sei $f(z) = \dfrac{z^2 - 10\,iz - 24 - e^{z-5i}}{(iz+5)^6}$, für $z \neq 5i$.

Entwickeln Sie f um die Stelle $z_0 = 5i$ in eine Laurent–Reihe der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k$$

und geben Sie c_k für alle $k \in \mathbb{Z}$ an.

Bestimmen Sie außerdem aus der Reihendarstellung die Art der Singularität von f in $5i$ und geben Sie das Residuum $\operatorname{Res}(f, 5i)$ an.

Lösung

Für $z \neq 5i$ gilt

$$\begin{aligned} f(z) =& \frac{z^2 - 10iz - 24 - e^{z-5i}}{(iz+5)^6} = \frac{(z-5i)^2 + 1 - e^{z-5i}}{-(z-5i)^6} \\ =& -\frac{1}{(z-5i)^4} - \frac{1}{(z-5i)^6} + \frac{e^{z-5i}}{(z-5i)^6}. \end{aligned}$$

Mit

$$e^{z-5i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-5i)^k}{k!}$$

folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{(z-5i)^4} - \frac{1}{(z-5i)^6} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-5i)^{k-6}}{k!} \\ &= -\frac{1}{(z-5i)^4} - \frac{1}{(z-5i)^6} + \sum_{k=-6}^{\infty} \frac{(z-5i)^k}{(k+6)!}. \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Die Koeffizienten der Laurent–Reihe sind daher gegeben durch

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k < -6 \\ -1 + 1 = 0 & \text{für } k = -6 \\ \frac{1}{(-5+6)!} = 1 & \text{für } k = -5 \\ -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} & \text{für } k = -4 \\ \frac{1}{(k+6)!} & \text{für } k > -4 \end{cases}$$

Aus den Koeffizienten c_k der Laurent–Reihe folgt sofort, dass f bei $z_0 = 5i$ eine Polstelle der Ordnung 5 hat.
Außerdem gilt $\operatorname{Res}(f, 5i) = c_{-1} = \frac{1}{(-1+6)!} = \frac{1}{120}$.
Alternative: Die Funktion f in $(\star)$ lässt sich auch weiter vereinfachen zu

$$f(z) = -\frac{1}{(z-5i)^4} + \sum_{k=-5}^{\infty} \frac{(z-5i)^k}{(k+6)!}.$$

Dann sind die Koeffizienten der Laurent–Reihe gegeben durch

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k < -5 \\ \frac{1}{(-5+6)!} = 1 & \text{für } k = -5 \\ -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} & \text{für } k = -4 \\ \frac{1}{(k+6)!} & \text{für } k > -4 \end{cases}$$

Aufgabe 6

Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ die Kurve, welche in $z_1 = -3+0\,i = -3$ beginnt, auf dem Teil des Kreises $|z| = 3$ mit negativem Imaginärteil liegt, bis $z_2 = 3+0\,i = 3$ verläuft und dann auf der reellen Achse nach $z_1 = -3$ zurückgeht.

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das folgende Integral

$$\int_\Gamma \frac{e^{2\pi i z}}{z^2 - z + 1}\, dz\,.$$

Lösung

Bestimme die Nullstellen: $z^2 - z + 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \vee \quad z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

z_2 liegt innerhalb des Integrationsgebietes Γ
und ist eine einfache Polstelle, wie wir im Folgenden sehen, und somit gilt für $f(z) = \frac{e^{2\pi i z}}{z^2 - z + 1}$:

$$Res(f, z_2) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) = \lim_{z \to z_2} \frac{e^{2\pi i z}}{z - z_1} = \frac{e^{2\pi i \cdot (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})}}{-i\sqrt{3}} = \frac{i e^{\pi\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} (\cos\pi + i \sin\pi) = \frac{-i e^{\pi\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}.$$

Mit dem Residuensatz folgt nun

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i\, Res(f, z_2) = \frac{2\pi e^{\pi\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi e^{\pi\sqrt{3}}.$$