RWTH AACHEN

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
maier@instmath.rwth-aachen.de

B. Sc. 28.04.2021
SoSe 2020 Dauer: 90 Minuten

Klausur: Höhere Mathematik IV

Aufgabe 1

Seien $\alpha \in \left\{8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}\right\}$ und $\beta \in \{1, -1\}$. Für welche $z = x + iy \in N \subset \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = e^{\alpha ix} + \beta i e^{\alpha iy}$$

holomorph? Geben Sie den Index j für $N_j \subset \mathbb{C}$ in folgender Liste an:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \mathbb{C} \\
N_2 &= \big\{(x, y) : \; x = y = 0\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_3 &= \big\{(x, y) : \; x = y\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_4 &= \big\{(x, y) : \; x = -y\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_5 &= \big\{(x, y) : \; x \in \mathbb{R}, \; y = x + k\pi/4 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_6 &= \big\{(x, y) : \; x \in \mathbb{R}, \; y = x + k\pi/2 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_7 &= \big\{(x, y) : \; x \in \mathbb{R}, \; y = x + k\pi \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_8 &= \big\{(x, y) : \; x \in \mathbb{R}, \; y = x + 2k\pi \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_9 &= \big\{(x, y) : \; x \in \mathbb{R}, \; y = x + 4k\pi \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_{10} &= \big\{(x, y) : \; x \in \mathbb{R}, \; y = x + \pi/8 + k\pi/4 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_{11} &= \big\{(x, y) : \; x \in \mathbb{R}, \; y = x + \pi/4 + k\pi/2 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_{12} &= \big\{(x, y) : \; x \in \mathbb{R}, \; y = x + \pi/2 + k\pi \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_{13} &= \big\{(x, y) : \; x \in \mathbb{R}, \; y = x + \pi + 2k\pi \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_{14} &= \big\{(x, y) : \; x \in \mathbb{R}, \; y = x + 2\pi + 4k\pi \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_{15} &= \big\{(x, y) : \; x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad y = x^2\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_{16} &= \big\{(x, y) : \; y \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x = y^2\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_{17} &= \big\{(x, y) : \; x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad y = x^4\big\} \subset \mathbb{C} \\
N_{18} &= \big\{(x, y) : \; y \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x = y^4\big\} \subset \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Lösung

Zunächst definieren wir $u(x, y) := \mathrm{Re}(f(x + iy))$ sowie $v(x, y) := \mathrm{Im}((f(x + iy)))$ für $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Wegen Euler gilt

$$\begin{aligned}
f(x + iy) &= \cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x) - \beta \sin(\alpha y) + \beta\, i \cos(\alpha y) \\
&= \big(\cos(\alpha x) - \beta \sin(\alpha y)\big) + i\big(\sin(\alpha x) + \beta \cos(\alpha y)\big)
\end{aligned}$$

und es folgt

$$u(x, y) = \cos(\alpha x) - \beta \sin(\alpha y) \qquad \text{und} \qquad v(x, y) = \sin(\alpha x) + \beta \cos(\alpha y)$$

für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann ist $(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ offenbar differenzierbar und f somit genau dann in $z = x + iy \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, d.h. es gilt $(x, y) \in N$, falls u und v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\, u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\, v(x,y), \\ \frac{\partial}{\partial x}\, v(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}\, u(x,y) \end{cases} \tag{CR}$$

für $z = x + iy$ erfüllen. Wenn wir u und v in die Gleichungen (CR) einsetzen, erhält man, dass

$$\left.\begin{array}{rcl} -\alpha\sin(\alpha x) & = & -\alpha\beta\sin(\alpha y) \\ \alpha\cos(\alpha x) & = & \alpha\beta\cos(\alpha y) \end{array}\right\} \iff \begin{cases} \sin(\alpha x) = \beta\sin(\alpha y) \\ \cos(\alpha x) = \beta\cos(\alpha y) \end{cases} \tag{1}$$

erfüllt ist.

1. <u>*Fall* $\beta = 1$</u>: Da $\sin(\alpha\cdot)$ und $\cos(\alpha\cdot)$ beide $\frac{2\pi}{\alpha}$–periodisch sind, gilt (1) für

$$y = x + \frac{2k\pi}{\alpha} \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{beliebig}\,. \tag{2}$$

   Andererseits sind das bereits alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die (1) erfüllen, da die Kurve

$$h(z) := \underbrace{\Big(\sin(\alpha z)\,,\ \cos(\alpha z)\Big)}_{= e^{\alpha z i} \in \mathbb{C}} \in \mathbb{R}^2, \quad z \in \mathbb{R} \tag{3}$$

   $\frac{2\pi}{\alpha}$–periodisch und für $z \in \left[0, \frac{2\pi}{\alpha}\right)$ injektiv ist.

2. <u>*Fall* $\beta = -1$</u>: In diesem Fall können wir wegen $\sin(z) = -\sin(z + \pi)$, bzw. $\cos(z) = -\cos(z + \pi)$ (1) umformulieren zu

$$\left.\begin{array}{rcl} \sin(\alpha x) & = & -\sin(\alpha y) \\ \cos(\alpha x) & = & -\cos(\alpha y) \end{array}\right\} \iff \begin{cases} \sin(\alpha x) = \sin(\alpha y + \pi) \\ \cos(\alpha x) = \cos(\alpha y + \pi), \end{cases} \tag{4}$$

   was wieder wegen der $\frac{2\pi}{\alpha}$–Periodizität von $\sin(\alpha\cdot)$ und $\cos(\alpha\cdot)$ für

$$y = x + \frac{(2k+1)\pi}{\alpha}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{5}$$

   erfüllt ist. Wie oben im 1. Fall argumentiert (vgl. (3)), hat man damit bereits alle Lösungen.

Schließlich können wir die Lösungsindizes j von $N = N_j$ abhängig von den beiden Parametern α und β aus der Liste ablesen.

$\beta \setminus \alpha$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$
1	5	6	7	8	9
-1	10	11	12	13	14

Aufgabe 2
Seien $\alpha \in \{2,3,5,6,7\}$ und $\beta \in \{1,-1\}$. Ferner sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ der gerichtete Weg von $z_0 = 0$ nach $z_1 = 2\cdot\sqrt{\alpha}i$ entlang des Kreisbogens auf dem Kreis mit Radius $\sqrt{\alpha}$ um $a = \sqrt{\alpha}i$, welcher durch den Punkt $\beta\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha}i$ geht.
Berechnen Sie

$$K := \int_\Gamma \frac{z}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}z - i}\,dz. \tag{6}$$

Lösung
Zunächst sei $f : \mathbb{C}\setminus\{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \frac{z}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}z - i} = \frac{\sqrt{\alpha}z}{z-a}.$$

f ist offenbar stetig. Ein Kreisbogen um a mit Radius $\sqrt{\alpha}$ läßt sich mit $a + \sqrt{\alpha}e^{\beta t i}$ parametrisieren (gegen den Uhrzeigersinn für $\beta = 1$ und mit für $\beta = -1$). Damit ist Γ parametrisert durch

$$\gamma : [0,\pi] \longmapsto \mathbb{C}, \quad \gamma(t) := a + \sqrt{\alpha}\, e^{(\beta t - \frac{\pi}{2})\, i} = a + \sqrt{\alpha}\, e^{\beta t i}(-i),$$

denn es gilt z.B.

$$\gamma(0) = a - \sqrt{\alpha}i = 0, \qquad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + \sqrt{\alpha}\, e^{\beta\frac{\pi}{2}i}\,(-i) = \sqrt{\alpha}i + \beta\sqrt{\alpha}$$

und

$$\gamma(\pi) = a + \sqrt{\alpha}\, e^{\pi i}(-i) = 2\sqrt{\alpha}i.$$

Offenbar ist $\Gamma = \gamma\big([0,\pi]\big) \subseteq \partial B_{\sqrt{\alpha}}(a) \subseteq \mathbb{C}\setminus\{a\}$, sodass das komplexe Kurvenintegral (6) wohldefiniert ist. Darüber hinaus erhalten wir

$$\begin{aligned}
K &= \int_\Gamma \frac{\sqrt{\alpha}z}{z-a}\,dz = \int_0^\pi \frac{\sqrt{\alpha}\big(a - i\sqrt{\alpha}\, e^{\beta t i}\big)}{\big(a - i\sqrt{\alpha}\, e^{\beta t i}\big) - a} \cdot \big(\sqrt{\alpha}\beta i\, e^{\beta t i}(-i)\big)\,dt \\
&= \int_0^\pi \big(\alpha i - i\alpha\, e^{\beta t i}\big)\cdot \beta i\,dt = \int_0^\pi -\alpha\beta + \alpha\beta\, e^{\beta t i}\,dt \\
&= \big[-\alpha\beta t + \alpha(i)^{-1}\, e^{\beta t i}\big]_0^\pi = -\alpha\beta\pi + (-i)\alpha\big(e^{\beta\pi i} - 1\big) \\
&= \alpha(2i - \beta\pi).
\end{aligned}$$

Nachfolgend geben wir die Werte für K in Abhängigkeit von den beiden Parametern α und β an:

$\beta \setminus \alpha$	2	3	5	6	7
1	4i - 2π	6i - 3π	10i - 5π	12i - 6π	14i - 7π
-1	4i + 2π	6i + 3π	10i + 5π	12i + 6π	14i + 7π

Aufgabe 3
Seien $g \in \{\sin, \cos\}$ und $\alpha \in \left\{-\frac{3\pi}{2},\ -\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2}\right\}$. Ferner sei

$$F : \Big\{z \in \mathbb{C} : |z+2| \neq 4\Big\} \to \mathbb{C}, \quad F(z) := \oint\limits_{|w-2|=4} \frac{w^2 g(w)}{(w+z)^2}\, dw,$$

gegeben. Mithilfe der Cauchyschen Integralformel berechne man $F'(\pi) + F'(\alpha)$.

Lösung
Zunächst definieren wir $\Gamma := \partial B_4(2)$ (wie üblich positiv orientiert) und $\Sigma :=$ Innengebiet$(\Gamma) = B_4(2)$. Dann ist $\mathbb{C} \setminus \Gamma = \Big\{z \in \mathbb{C} : |z-2| \neq 4\Big\}$ und $\widetilde{F} \colon \mathbb{C} \setminus \Gamma$ sei definiert durch

$$\tilde{F}(z) := F(-z) = \oint\limits_{|w-2|=4} \frac{w^2 g(w)}{(w-z)^2}\, dw = \oint\limits_{\Gamma} \frac{w^2 g(w)}{(w-z)^2}\, dw = \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw\,, \tag{7}$$

wobei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(w) := w^2 g(w)$. Man beachte, dass

$$\widetilde{F}'(z) = -F'(-z), \tag{8}$$

überall wo $\widetilde{F}$ differenzierbar. Außerdem ist f holomorph und Γ ist eine einfach geschlossene, reguläre Kurve mit positiver Orientierung. Für $z \in \overline{B_4(2)}^c$ ist nach dem Cauchyschen Integralsatz $\widetilde{F}(z) = 0$, da $\frac{f(w)}{(w-z)^2}$ für $w \in \Sigma$ holomorph. Insbesondere ist $\widetilde{F}'(z) = 0$ für alle $z \in \overline{B_4(2)}^c$ und mit (8) daher

$$F'(\pi) = -\widetilde{F}'(-\pi) = 0\,, \quad \text{da} \quad -\pi \in \overline{B_4(2)}^c.$$

Darüber hinaus liefert *Satz 12.5.13*, dass f sogar unendlich oft komplex differenzierbar ist und es gilt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw \overset{(7)}{=} \frac{1}{2\pi i} \tilde{F}(z) \quad \text{für alle} \quad z \in B_4(2).$$

Es folgt für $z \in B_4(2)$

$$\widetilde{F}(z) = 2\pi i f'(z) = 2\pi i\Big(2z g(z) + z^2 g'(z)\Big)$$

und nochmal mit Produktregel

$$\frac{1}{2\pi i}\widetilde{F}'(z) = 2g(z) + 4z\, g'(z) + z^2 g''(z). \tag{9}$$

Insbesondere gilt für $\alpha \in B_4(-2)$, bzw. $-\alpha \in B_4(2)$

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &\overset{(8)}{=} -\widetilde{F}'(-\alpha) \overset{(9)}{=} 2\pi i\Big[-2g(-\alpha) + 4\alpha\, g'(-\alpha) - \alpha^2 g''(-\alpha)\Big] \\ &= \begin{cases} 2\pi i\big[(2-\alpha^2)\sin(\alpha) + 4\alpha\cos(\alpha)\big], & \text{falls} \quad g = \sin, \\ 2\pi i\big[(\alpha^2-2)\cos(\alpha) + 4\alpha\sin(\alpha)\big], & \text{falls} \quad g = \cos \end{cases} \end{aligned}$$

Nachfolgend geben wir die Werte für $F'(\pi) + F'(\alpha) = F'(\alpha)$ in Abhängigkeit von den beiden Variablen g und α an. Man beachte, dass alle $\alpha \in \left\{-\frac{3\pi}{2},\ -\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2}\right\}$ in $B_4(-2)$ liegen.

$g \setminus \alpha$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\left(4\pi - \frac{9}{2}\pi^3\right) i$	$8\pi^2 i$	$\left(-4\pi + \frac{1}{2}\pi^3\right) i$	0	$\left(4\pi - \frac{1}{2}\pi^3\right) i$
cos	$-12\pi^2 i$	$\left(4\pi - 2\pi^3\right) i$	$4\pi^2 i$	$-4\pi i$	$4\pi^2 i$

Aufgabe 4
Sei $\mathfrak{b} \in \{-6,-5,-4,-3,-2,2,3,4,5,6\}$. Für die Funktion

$$f(z) \;:=\; \frac{z+\mathfrak{b}\sqrt{2}}{(z^2+1)(z^2-1)}\,, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \big\{\text{Definitionslücken}\big\}$$

ist die komplexe Partialbruchzerlegung anzugeben.
Welcher Ansatz ist zielführend?
(d) $f(z) \;=\; \frac{\alpha}{z+i} \;+\; \frac{\beta}{z-i} \;+\; \frac{\gamma}{z-1} \;+\; \frac{\delta}{z+1}$
Berechnen Sie die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und geben Sie an, in welcher Zeile der folgenden Antwortmatrix das richtige Ergebnis steht. Falls keine der angegebenen Varianten richtig ist, tragen Sie als Zeile 0 ein.

Zeile	α	β	γ	δ
1	$-\frac{1}{4}+\frac{5}{2}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}-\frac{5}{2}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}-\frac{5}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{5}{2}\sqrt{2}$
2	$-\frac{1}{4}+\frac{9}{2}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}-\frac{9}{2}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\sqrt{2}$
3	$-\frac{1}{4}+2\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}-2\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}-2\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}+2\sqrt{2}$
4	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
5	$-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{2}$
6	$-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
7	$-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}-\frac{7}{4}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\sqrt{2}$
8	$-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{2}$
9	$-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\sqrt{2}$
10	$-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{2}$
11	$-\frac{1}{4}-\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}+\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}+\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}-\sqrt{2}$
12	$-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\sqrt{2}$
13	$-\frac{1}{4}+\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}-\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}-\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}+\sqrt{2}$
14	$-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{2}$
15	$-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$
16	$-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\sqrt{2}$
17	$-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}-\frac{7}{4}\sqrt{2}$
18	$-\frac{1}{4}-2\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}+2\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}+2\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}-2\sqrt{2}$
19	$-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{2}$
20	$-\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\sqrt{2}i$	$\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\sqrt{2}$

Lösung
Zunächst gilt

$$f(z) = \frac{z+\mathfrak{b}\sqrt{2}}{(z+i)(z-i)(z-1)(z+1)} \tag{10}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \big\{\text{Definitionslücken}\big\} = \mathbb{C} \setminus \{-i, i, -1, 1\}$. Für eine komplexe Partialbruchzerlegung ist nur der Ansatz (d)

$$f(z) \;=\; \frac{\alpha}{z\,+\,i} \;+\; \frac{\beta}{z\,-\,i} \;+\; \frac{\gamma}{z-1} \;+\; \frac{\delta}{z+1} \tag{11}$$

mit Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ zielführend, d.h. für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i, -1, 1\}$ muss gelten:

$$\frac{z+\mathfrak{b}\sqrt{2}}{(z+i)(z-i)(z-1)(z+1)} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{z\,+\,i} \;+\; \frac{\beta}{z\,-\,i} \;+\; \frac{\gamma}{z-1} \;+\; \frac{\delta}{z+1} \tag{12}$$

Variante 1 (Grenzwertmethode)

Multiplizieren wir (12) mit $(z+i)$ und setzen $z := -i$, erhalten wir

$$\alpha = \frac{-i + \mathfrak{b}\sqrt{2}}{(-2i)(-i-1)(-i+1)} = \big(-i + \mathfrak{b}\sqrt{2}\big) \cdot \underbrace{\frac{i}{2} \cdot \frac{-1}{1+1}}_{=-\frac{i}{4}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathfrak{b}\sqrt{2}i$$

Kurzversion: Bereits hier lässt sich eine zugehörige Zeilennummer zuordnen, weil alle möglichen Ergebnisse für α in der vorgegebenen Tabelle verschieden sind (vgl. Lösungstabelle am Ende).
Zur Kontrolle berechnen wir auch die anderen Parameter. Multipliziere (12) mit $(z-i)$ und setze $z := i$ ergibt

$$\beta = \frac{i + \mathfrak{b}\sqrt{2}}{(2i)\cdot(i-1)(i+1)} = \big(i + \mathfrak{b}\sqrt{2}\big) \cdot \underbrace{\frac{i}{-2} \cdot \frac{1}{-1-1}}_{=\frac{i}{4}} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathfrak{b}\sqrt{2}i$$

Multiplizieren wir (12) mit $(z-1)$ und setzen $z := +1$ liefert

$$\gamma = \frac{1 + \mathfrak{b}\sqrt{2}}{(1+i)(1-i)\cdot 2} = \frac{1}{4}\big(1 + \mathfrak{b}\sqrt{2}\big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathfrak{b}\sqrt{2}$$

und schließlich folgt nach multiplizieren mit $(z+1)$ und setzen von $z := -1$

$$\delta = \frac{-1 + \mathfrak{b}\sqrt{2}}{(-1+i)(-1-i)(-2)} = \big(-1 + \mathfrak{b}\sqrt{2}\big) \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \, \frac{1}{(i+1)(i-1)}}_{=-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathfrak{b}\sqrt{2}$$

Variante 2 (Gleichungssystem elementar)

Wegen

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{z+i} + \frac{\beta}{z-i} + \frac{\gamma}{z-1} + \frac{\delta}{z+1} &= \frac{(\alpha+\beta)z + (\beta-\alpha)i}{z^2+1} + \frac{(\gamma+\delta)z + (\gamma-\delta)}{z^2-1} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)(z^3-z) + (\beta-\alpha)i(z^2-1) + (\gamma+\delta)(z^3+z) + (\gamma-\delta)(z^2+1)}{(z^2+1)(z^2-1)}\end{aligned}$$

folgt aus der Definition von f (siehe (10) und (12))

$$\begin{aligned} z + \mathfrak{b}\sqrt{2} &= (\alpha+\beta+\gamma+\delta)z^3 + \Big[(\beta-\alpha)i + (\gamma-\delta)\Big]z^2 \\ &+ \Big[-(\alpha+\beta) + (\gamma+\delta)\Big]z + \Big[(\alpha-\beta)i + (\gamma-\delta)\Big]. \end{aligned}$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhalten wir für die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \alpha + \beta + \gamma + \delta &=& 0 & \text{(I)} \\ (\beta - \alpha)i + (\gamma - \delta) &=& 0 & \text{(II)} \\ -(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) &=& 1 & \text{(III)} \\ (\alpha - \beta)i + (\gamma - \delta) &=& \mathfrak{b}\sqrt{2} & \text{(IV)} \end{array} \right. \tag{13}$$

$$\begin{array}{llll} & (\mathrm{I}) - (\mathrm{III}) & \text{ergibt} & 2(\alpha+\beta) = -1 \qquad (\mathrm{V}) \\ \text{und aus} & (\mathrm{IV}) - (\mathrm{II}) & \text{folgt} & 2(\alpha-\beta)i = \mathfrak{b}\sqrt{2} \qquad (\mathrm{VI}) \end{array}$$

Aus (VI) + i (V) ergibt sich daraus $4\alpha i = \mathfrak{b}\sqrt{2} - i$, bzw. $\alpha = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathfrak{b}\sqrt{2}i$, woraus wie in **Variante 1** bereits erwähnt, eindeutig die Zeilennummer in der Lösungstabelle bestimmt werden kann.

Aber auch die weiteren Parameter lassen sich zur Kontrolle leicht ermitteln: Mit (V) folgt sofort

$$\beta = -\frac{1}{2} - \alpha \; = \; -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathfrak{b}\sqrt{2}i$$

Des Weiteren ergibt (I) + (III): $2(\gamma+\delta) = 1$ (VII)
und aus (II) + (IV) folgt: $2(\gamma-\delta) = \mathfrak{b}\sqrt{2}$, (VIII)
woraus sich schließlich

$$\gamma = \frac{1}{4} + \frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{1}{2} - \gamma = \frac{1}{4} - \frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2}$$

ergibt.

Variante 3 (Gleichungssystem mit Gauß)
Wie in **Variante 2** ergibt sich aus (13) das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma + \delta & = & 0\,, \\ -i\alpha + i\beta + \gamma - \delta & = & 0\,, \\ -\alpha - \beta + \gamma + \delta & = & 1\,, \\ i\alpha - i\beta + \gamma - \delta & = & \mathfrak{b}\sqrt{2}\,, \end{array} \right.$$

welches wir mit Gauß lösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 & -1 & \mathfrak{b}\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{II+i\cdot I,\\ III+I,\\ IV-i\cdot I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2i & 1+i & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2i & 1-i & -1-i & \mathfrak{b}\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{IV+II,\\ II/(2i),\, III/2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -2 & \mathfrak{b}\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{IV-2\cdot III\\ IV/(-4)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}-\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{III-IV,\\ II-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\cdot IV,\\ I-IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4}+\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & 0 & -\frac{1}{8}+\frac{\mathfrak{b}}{8}\sqrt{2}+\left(-\frac{1}{8}+\frac{\mathfrak{b}}{8}\sqrt{2}\right)i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4}+\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}-\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{II-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\cdot III,\\ I-III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}+\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2}i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4}+\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}-\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I-II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}-\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2}i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}+\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2}i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4}+\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}-\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2} \end{array}\right)$$

Somit hat die komplexe Partialbruchzerlegung von f tatsächlich die Gestalt (11), wobei die zugehörigen Parameter durch

$$\alpha = -\frac{1}{4}-\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2}i, \qquad \beta = -\frac{1}{4}+\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2}i,$$
$$\gamma = \frac{1}{4}+\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2}, \qquad \delta = \frac{1}{4}-\frac{\mathfrak{b}}{4}\sqrt{2}$$

gegeben sind.
Nachfolgend geben wir die entsprechenden Zeilen in der obigen Antwortmatrix in Abhängigkeit vom Parameter $\mathfrak{b}$ an:

$\mathfrak{b}$	-6	-5	-4	-3	-2	2	3	4	5	6
Zeile	8	9	13	14	15	6	10	11	12	16

Aufgabe 5
Seien $(\alpha,\beta)\in\big\{(1,-2),(1,2),(-1,-2),(-1,2),(2,-2),(2,2),(2,-1),(-2,-2),(-2,2),\ (-2,-1)\big\}$.
Entwickeln Sie

$$f(z) \;=\; \frac{1}{(z-\alpha\sqrt{2})^3}$$

in $a=\beta i$ in eine Laurent-Reihe für z mit $|z-a|>\sqrt{2\alpha^2+\beta^2}$ und bestimmen Sie die Laurent-Reihe von f in der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{k_0} c_k\cdot(z-a)^k.$$

Geben Sie k_0 an und wählen Sie c_k aus der folgenden Tabelle.

Fall	Koeffizienten		Fall	Koeffizienten
1	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(\sqrt{2}+2i\right)^{3+k}}$		11	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(2\sqrt{2}-i\right)^{2+k}}$
2	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(\sqrt{2}-2i\right)^{3+k}}$		12	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(-2\sqrt{2}-i\right)^{2+k}}$
3	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(\sqrt{2}-i\right)^{3+k}}$		13	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2^{4+k}\left(i-\sqrt{2}\right)^{3+k}}$
4	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(\sqrt{2}+i\right)^{3+k}}$		14	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2^{4+k}\left(-\sqrt{2}-i\right)^{3+k}}$
5	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(-\sqrt{2}+2i\right)^{3+k}}$		15	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(-\sqrt{2}-i\right)^{3+k}}$
6	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(-\sqrt{2}-2i\right)^{3+k}}$		16	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(-\sqrt{2}+i\right)^{3+k}}$
7	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(-\sqrt{2}-i\right)^{2+k}}$		17	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(2\sqrt{2}+i\right)^{3+k}}$
8	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(-\sqrt{2}+i\right)^{2+k}}$		18	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(i-2\sqrt{2}\right)^{3+k}}$
9	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2^{4+k}\left(\sqrt{2}+i\right)^{3+k}}$		19	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(\sqrt{2}+2i\right)^{2+k}}$
10	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2^{4+k}\left(\sqrt{2}-i\right)^{3+k}}$		20	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(\sqrt{2}-2i\right)^{2+k}}$

Falls keine der angegebenen Varianten zutreffen, tragen Sie als Wert 0 ein.

Lösung
Zunächst sei $r:=\sqrt{2\alpha^2+\beta^2}>0$ sowie $A:=K_{r,\infty}(a):=\{z\in\mathbb{C}\mid r<|z-a|\}$. Unter Verwendung der unteren Dreiecksungleichung gilt dann

$$\left|z-\alpha\sqrt{2}\right|\geq|z-a|-\left|a-\alpha\sqrt{2}\right|=|z-a|-r>0$$

für alle $z\in A$, sodass $f:A\longmapsto\mathbb{C}$ wohldefiniert und holomorph ist. Somit lässt sich f nach *Satz 12.7.2* für alle $z\in A$ als Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt a darstellen. Um diese zu bestimmen, verwenden wir

$$f(z) \;=\; \frac{1}{(z-\alpha\sqrt{2})^3} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z-\alpha\sqrt{2}}\right). \tag{14}$$

Die Laurent–Entwicklung der Funktion $g(z)=\frac{1}{z-z_0}$ um den Punkt a im Außengebiet ist aus der Vorlesung bekannt:

$$g(z) \;=\; \frac{1}{z-z_0} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\,\big(z_0-a\big)^n\big(z-a\big)^{-(n+1)},\ z\in\mathbb{C}\setminus\overline{B_r(a)}\,.$$

Für $z_0 = \alpha\sqrt{2}$ ergibt das

$$\frac{1}{z-\alpha\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^n (z-a)^{-n-1} = \sum_{m=-\infty}^{0} \frac{1}{\left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^m}(z-a)^{m-1} \tag{15}$$

und somit gilt

$$f(z) \overset{(14)}{=} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z-\alpha\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\sum_{m=-\infty}^{0} \frac{1}{\left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^m}(z-a)^{m-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{0} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{\left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^m}(z-a)^{m-1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{0} \frac{d}{dz}\left(\frac{m-1}{\left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^m}(z-a)^{m-2}\right)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{0} \frac{(m-1)(m-2)}{2\left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^m}(z-a)^{m-3} = \sum_{k=-\infty}^{-3} \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^{3+k}}(z-a)^k$$

für alle $z \in A$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung nach *Satz 12.7.2* folgt $k_0 = -3$ sowie

$$c_k = \begin{cases} \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(\alpha\sqrt{2}-\beta i\right)^{3+k}}, & \text{falls} \quad k \le k_0, \\ 0, & \text{falls} \quad k > k_0. \end{cases}$$

Nachfolgend geben wir den entsprechenden Fall in der obigen Tabelle in Abhängigkeit von den Parametern (α, β) an:

(α,β)	$(1,-2)$	$(1,2)$	$(-1,-2)$	$(-1,2)$	$(2,-2)$	$(2,2)$	$(2,-1)$	$(-2,-2)$	$(-2,2)$	$(-2,-1)$
Fall	1	2	5	6	9	10	17	13	14	18

Alternative zur Bestimmung von (15)

Schreiben wir

$$\frac{1}{z-\alpha\sqrt{2}} = \frac{1}{(z-a)-(\alpha\sqrt{2}-a)} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha\sqrt{2}-a}{z-a}}, \qquad z \in A$$

lässt sich wegen

$$\left|\frac{\alpha\sqrt{2}-a}{z-a}\right| = \frac{r}{|z-a|} < 1 \quad \text{für} \quad z \in A$$

die geometrische Reihe verwenden

$$\frac{1}{z-\alpha\sqrt{2}} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha\sqrt{2}-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha\sqrt{2}-a}{z-a}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^n (z-a)^{-n-1}.$$

Aufgabe 6
Sei $\alpha \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3\right\}$. Berechnen Sie mithilfe des Residuensatzes die folgenden zwei komplexen Kurvenintegrale I und J und geben Sie deren Werte an:
Variante 1:

$$I = I_1 := \oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^3(1-\alpha z^2)^4} \qquad \text{und} \qquad J = J_1 := \oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{dz}{z^{10}(1-\alpha z^2)^2}$$

Variante 2:

$$I = I_2 := \oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{dz}{z^8(1-\alpha z^2)^3} \qquad \text{und} \qquad J = J_2 := \oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^5(1-\alpha z^2)^3}$$

Lösung
Zunächst definieren wir $f_j,\ g_j \colon \mathbb{C} \setminus \left\{0, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right\} \longmapsto \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, gegeben durch

$$f_1(z) := \frac{1}{z^3(1-\alpha z^2)^4} \qquad \text{und} \qquad g_1(z) := \frac{1}{z^{10}(1-\alpha z^2)^2}\,,$$

sowie

$$f_2(z) := \frac{1}{z^8(1-\alpha z^2)^3} \qquad \text{und} \qquad g_2(z) := \frac{1}{z^5(1-\alpha z^2)^3}.$$

Dann sind f_j und g_j offenbar holomorph, da 0 und $\pm\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ gerade die Definitionslücken bzw. Pole der beiden Funktionen sind. Nun gilt

$$\left|\pm\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 0\right| > \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

und die den Kurvenintegralen I und J zugrunde liegenden Kurven sind beide einfach geschlossen, positiv orientiert und regulär. Dann ergibt sich mit dem Residuensatz (siehe *Satz 12.8.3*)

$$I = I_j = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\big(f_j, 0\big) \qquad \text{und} \qquad J = J_j = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\big(g_j, 0\big), \quad j = 1, 2. \tag{16}$$

Um diese Residuen zu berechnen, verwenden wir die geometrische Reihe, welche für $\left|\alpha z^2\right| < 1$ die folgende Darstellung liefert,

$$\frac{1}{1-\alpha z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{2n}, \quad |z| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,, \tag{17}$$

welche nur gerade Potenzen in z hat. Damit hat die Laurent–Entwicklung um Null sowohl von g_1, als auch von f_2 keinen Beitrag bei z^{-1}. Es folgt:

$$\operatorname{Res}(g_1, 0) = 0 = \operatorname{Res}(f_2, 0)\,, \quad \text{also mit (16)} \quad J_1 = I_2 = 0\,. \tag{18}$$

Nach (17) gibt aber auch

$$\frac{1}{\left(1-\alpha z^2\right)^3} = \big(1 + \alpha z^2 + \alpha^2 z^4 + O(z^6)\big)^3 = 1 + 3\alpha z^2 + 6\alpha^2 z^4 + O(z^6).$$

Es folgt sofort

$$\operatorname{Res}(g_2, 0) \;=\; 6\alpha^2, \quad \text{also wieder mit (16)} \quad J_2 = 12\alpha^2\pi\, i\,. \tag{19}$$

Analog ist

$$\frac{1}{\left(1-\alpha z^2\right)^4} \;=\; 1 \,+\, 4\alpha z^2 + O\big(z^4\big),$$

womit $\operatorname{Res}(f_1, 0) = 4\alpha$ folgt, d.h. $I_1 = 8\alpha\,\pi\, i$.

Nachfolgend geben wir die Werte von $I = I_j$ und $J = J_j\,,\ j = 1, 2$, in Abhängigkeit von den Varianten und dem Parameter α an:

Werte von I:

Variante \ α	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	3
Variante 1	$2\pi i$	$\frac{8}{3}\pi i$	$4\pi i$	$16\pi i$	$24\pi i$
Variante 2	0	0	0	0	0

Werte von J:

Variante \ α	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	3
Variante 1	0	0	0	0	0
Variante 2	$\frac{3}{4}\pi i$	$\frac{4}{3}\pi i$	$\frac{1}{3}\pi i$	$48\pi i$	$108\pi i$

Alternative z.B. für $\operatorname{Res}(f_1, 0)$:

Mit *Lemma 12.8.5* erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\big(f_1, 0\big) &= \frac{1}{2!}\cdot\lim_{z\to 0}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3 f_1(z)\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to 0}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{(1-\alpha z^2)^4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to 0}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{8\alpha z}{(1-\alpha z^2)^5}\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to 0}\left[\frac{8\alpha(1-\alpha z^2)^5 + 80\alpha^2 z^2(1-\alpha z^2)^4}{(1-\alpha z^2)^{10}}\right] \\
&= 4\alpha.
\end{aligned} \tag{20}$$