RWTH AACHEN

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
maier@instmath.rwth-aachen.de

B. Sc.
SoSe 2020

Klausur: Höhere Mathematik IV für Physiker

04.08.2020
Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie eine Möbius–Transformation der Form

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad z \in \widehat{\mathbb{C}},$$

so dass $f(i) = 0$, $f(0) = 2$ und $f(2i) = \infty$.

(b) Was ist $f^{-1}(3+i)$?

(c) Bestimmen Sie $f(Q)$, wobei Q den rechten oberen Quadranten

$$Q = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0 \right\}$$

bezeichnet, und skizzieren Sie $f(Q)$.

Lösung

(a) Aus $f(i) = 0$ und $f(2i) = \infty$ folgt

$$b = -ai, \quad d = -2ic,$$

also

$$f(z) = \frac{a(z-i)}{c(z-2i)}.$$

Aus $f(0) = 2$ wiederum $a = 4c$.
Insgesamt ist

$$f(z) = \frac{4(z-i)}{z-2i}.$$

(b) Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$f^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a} = \frac{-2iw+4i}{-w+4}.$$

Einsetzen ergibt direkt

$$f^{-1}(3+i) = \frac{2-2i}{1-i} = 2.$$

(c) Zunächst gilt für die Möbius-Transformation f, dass Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden abgebildet werden.
Wegen $0, i, 2i \in i\mathbb{R}$ und $2, 0, \infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, folgt bereits

$$f(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Genauer ist wegen

$$f(iy) = \frac{4(y-1)}{y-2} \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} 4$$

und $f(2i) = \infty$, $f(3i) = 8$

$$f(\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) > 2i\}) = \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \in (4, \infty)\}.$$

Weiter ist wegen $f(i) = 0$, $f(0) = 2$ und $f(2i) = \infty$

$$f(\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) \in (0, 2)\}) = \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \in (-\infty, 2)\}.$$

Insgesamt also

$$f(\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) \in (0, \infty) \setminus \{2\}\}) = \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z) \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty), \mathrm{Im}(z) = 0\} =: M_1.$$

Berechne nun $f(\mathbb{R})$. Es gilt $0, 2 \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 2$, $f(2) = 3 + i$. Wegen $f(iy) \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} 4$, folgt

$$f(\infty) = 4,$$

sodass $f(\mathbb{R})$ ein Kreis sein muss.
Wegen $|2 - 3| = |(3 + i) - 3| = |4 - 3| = 1$, folgt

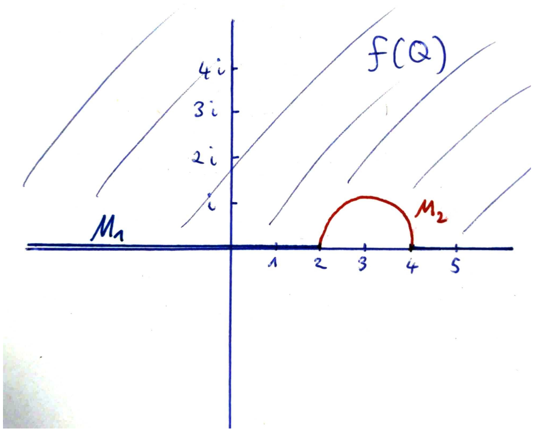
$$f(\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) > 0\}) = \{z = x + iy \in \mathbb{C} |\, (x - 3)^2 + y^2 = 1, y > 0\} =: M_2.$$

$f(Q)$ ist berandet von M_1 und M_2. Setze einen inneren Punkt von Q ein für das genaue Abbildungsverhalten:

$$f(1 + i) = 2 + 2i$$

hat liegt oberhalb von $M_1 \cup M_2$. Damit ist

$$f(Q) = \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) > 0\} \setminus B_1(3).$$



Aufgabe 2

Es sei $f(z) = \dfrac{z^2 - 10\,iz - 24 - e^{z-5i}}{(iz+5)^6}$, für $z \neq 5i$.

Entwickeln Sie f um die Stelle $z_0 = 5i$ in eine Laurent–Reihe der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k$$

und geben Sie c_k für alle $k \in \mathbb{Z}$ an.

Bestimmen Sie außerdem aus der Reihendarstellung die Art der Singularität von f in $5i$ und geben Sie das Residuum $\operatorname{Res}(f, 5i)$ an.

Lösung

Für $z \neq 5i$ gilt

$$\begin{aligned} f(z) =& \frac{z^2 - 10iz - 24 - e^{z-5i}}{(iz+5)^6} = \frac{(z-5i)^2 + 1 - e^{z-5i}}{-(z-5i)^6} \\ =& -\frac{1}{(z-5i)^4} - \frac{1}{(z-5i)^6} + \frac{e^{z-5i}}{(z-5i)^6}. \end{aligned}$$

Mit

$$e^{z-5i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-5i)^k}{k!}$$

folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{(z-5i)^4} - \frac{1}{(z-5i)^6} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-5i)^{k-6}}{k!} \\ &= -\frac{1}{(z-5i)^4} - \frac{1}{(z-5i)^6} + \sum_{k=-6}^{\infty} \frac{(z-5i)^k}{(k+6)!}. \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Die Koeffizienten der Laurent–Reihe sind daher gegeben durch

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k < -6 \\ -1+1 = 0 & \text{für } k = -6 \\ \frac{1}{(-5+6)!} = 1 & \text{für } k = -5 \\ -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} & \text{für } k = -4 \\ \frac{1}{(k+6)!} & \text{für } k > -4 \end{cases}$$

Aus den Koeffizienten c_k der Laurent–Reihe folgt sofort, dass f bei $z_0 = 5i$ eine Polstelle der Ordnung 5 hat.

Außerdem gilt $\operatorname{Res}(f, 5i) = c_{-1} = \frac{1}{(-1+6)!} = \frac{1}{120}$.

Alternative: Die Funktion f in ($\star$) lässt sich auch weiter vereinfachen zu

$$f(z) = -\frac{1}{(z-5i)^4} + \sum_{k=-5}^{\infty} \frac{(z-5i)^k}{(k+6)!}.$$

Dann sind die Koeffizienten der Laurent–Reihe gegeben durch

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k < -5 \\ \frac{1}{(-5+6)!} = 1 & \text{für } k = -5 \\ -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} & \text{für } k = -4 \\ \frac{1}{(k+6)!} & \text{für } k > -4 \end{cases}$$

Aufgabe 3

Sind folgende Aussagen **wahr** oder **falsch**?

Geben Sie eine kurze Begründung, bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) Polynome $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$ mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, \ldots, m$, sind in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ (komplex) analytisch und in jedem $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ reell analytisch.

(b) Für die Funktion

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{aligned}$$

gilt für jede Nullfolge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dass $\left|f(z_n)\right| \longrightarrow \infty \ (n \to \infty)$.

(c) Die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1\,, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

liegt in $\widetilde{H}^1(0, \pi)$ bzgl. des Cosinus VONS von $L^2(0, \pi)$.

Hinweis: zu erkennen, ob die Aussage **wahr** oder **falsch** ist, ist nur eine notwendige Bedingung um Punkte zu erhalten, aber nicht hinreichend.

Lösung

(a) Die Aussage ist **falsch**.
Beispielsweise ist das Polynom $p(z) = z + i$ zwar für alle $z \in \mathbb{C}$ komplex analytisch, jedoch für kein $z \in \mathbb{R}$ reell analytisch.

Alternative: Für jedes Polynom bei dem auch nur ein Koeffizient $a_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist, ist die Einschränkung $p_{|\mathbb{R}}$ keine Abbildung von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kann also nicht reell analytisch sein.

(b) Die Aussage ist **falsch**.
Betrachte beispielsweise die Nullfolge definiert durch $z_n := \frac{i}{n}$. Dann gilt

$$f(z_n) = e^{-n^2} \longrightarrow 0 \ \ (n \to \infty).$$

(c) Die Aussage ist **falsch**.
Für $\beta_k :=< h, e_k >$ mit $e_k := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kx)$ und $k \geq 1$ gilt

$$\beta_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(kx) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(kx) dx \Big) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(kx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2}{k} \sin\left(\frac{\pi}{2} k\right).$$

Da $\beta_{2k} = 0$ und wegen $|\beta_{2k+1}|^2 \cdot (2k+1)^2 = \frac{8}{\pi}$ divergiert auch die Reihe über $|\beta_k|^2 \cdot k^2$ und h ist nach Satz 13.3.5 nicht in $\widetilde{H}^1(0, \pi)$ bzgl. des Cosinus VONS von $L^2(0, \pi)$.

Alternative: Wegen $\widetilde{H}^1(0, \pi) \subset H^1(0, \pi)$ und der Sobolev Einbettung $H^1(0, \pi) \hookrightarrow C([0, \pi])$ kann h nicht in $\widetilde{H}^1(0, \pi)$ sein, da es nicht stetig ist.

Aufgabe 4

(a) Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannte Fourier–Transformierte von $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$,

$$\widehat{f}(\omega) \;=\; \mathcal{F}\left\{e^{-\frac{t^2}{2}}\right\}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}\,,$$

um für $g_0(t) = e^{-t^2}$, $g_1(t) = te^{-t^2}$ und $g_2(t) = t^2e^{-t^2}$ jeweils die Fourier–Transformierte $\widehat{g}_j = \mathcal{F}[g_j]\,,\ j = 0,1,2,$ zu bestimmen.

(b) Berechnen Sie für

$$g(t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\cdot s^2\cdot e^{-s^2}ds\,, \quad t\in\mathbb{R}\,,$$

die Fourier–Transformierte $\widehat{g}(\omega) = \mathcal{F}[g](\omega)$, wobei

$$h(t) \;:=\; \begin{cases} 1\,, & \text{für} \;\; |t| \;\le\; 1 \\ 0\,, & \text{für} \;\; |t| \;>\; 1\,. \end{cases}$$

Hinweis: Sie dürfen aus der Vorlesung als bekannt voraussetzen, dass

$$\widehat{h}(\omega) \;=\; \mathcal{F}[h](\omega) \;=\; \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,, & \text{für} \;\; \omega \;=\; 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\omega)}{\omega}\,, & \text{für} \;\; \omega \;\ne\; 0\,. \end{cases}$$

Lösung

(a) Es gilt $g_0(t) = f(\sqrt{2}t)$ und mit den Rechenregeln für Fouriertransformationen entsprechend

$$\hat{g}_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{f}(\tfrac{\omega}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Weiterhin gilt $g_1(t) = t\cdot g_0(t)$ und mit der Rechenregel

$$\mathcal{F}\{tf(t)\}(\omega) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\hat{f}(\omega) \tag{$*$}$$

gilt weiter:

$$\hat{g}_1(\omega) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\hat{g}_0(\omega) = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\omega e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Schließlich gilt $g_2(t) = t\cdot g_1(t)$ und aus $(*)$ folgt wieder

$$\hat{g}_2(\omega) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\hat{g}_1(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\omega e^{-\frac{\omega^2}{4}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{\omega^2}{4}} - \frac{\omega^2}{2}e^{-\frac{\omega^2}{4}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1-\frac{\omega^2}{2}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

(b) Es gilt: $g = h\otimes g_2$ und damit nach Rechenregeln

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi}\hat{h}(\omega)\cdot\hat{g}_2(\omega).$$

Für $\omega = 0$ ergibt sich

$$\hat{g}(0) = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ansonsten

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1-\frac{\omega^2}{2}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\omega)\left(\frac{1}{\omega}-\frac{\omega}{2}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Aufgabe 5

Es sei

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) := \left\{ x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \text{mit } x_j \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \right\}.$$

der Raum der quadrat-summierbaren Folgen. Sie dürfen voraussetzen, dass ℓ^2 vermöge

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot y_j\,, \quad \text{für} \quad x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}\,,\; y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$$

ein Hilbertraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist.

Weiterhin definieren wir für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$,

$$A_\alpha(x) := \left(\alpha^j x_j\right)_{j\in\mathbb{N}}\,.$$

(a) Für welche α ist A_α als linearer Operator von ℓ^2 nach ℓ^2 wohldefiniert? Beweisen Sie Ihre Aussage und geben Sie eine obere Schranke für die Operatornorm an.

(b) Zeigen Sie, dass A_α für $|\alpha| \le 1$ selbstadjungiert ist.

(c) Bestimmen Sie für $|\alpha| \le 1$ alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A_α.

(d) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α ein kompakter Operator? Beweisen Sie ihre Aussage.

Hinweis: In ℓ^2 gilt folgendes Kompaktheitskriterium, welches ohne Beweis verwendet werden darf:

$$M \subset \ell^2 \;\text{ ist kompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1.\ M \text{ ist beschränkt} \\ 2.\ M \text{ ist abgeschlossen} \\ 3.\ \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ so dass} \\ \qquad \displaystyle\sum_{j=m_0+1}^{\infty} |x_j|^2 < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in M\,. \end{cases}$$

Lösung

(a) A_α ist, sobald es wohldefiniert ist, linear.

Behauptung: A_α ist wohldefiniert genau dann, wenn $|\alpha| \le 1$.

Falls $|\alpha| \le 1$, gilt

$$\|A_\alpha x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{2j} x_j^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^2 x_j^2 = \alpha^2 \|x\|^2\,.$$

Insbesondere ist $\|A_\alpha\| \le |\alpha|$.

Falls $|\alpha| > 1$, betrachte $z := (\frac{1}{j})_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Dann gilt

$$\|A_\alpha z\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2j}}{j^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha^j}{j}\right)^2,$$

diese Reihe kann aber nicht konvergieren, da $(\frac{\alpha^j}{j})_{j\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist (kann man z.B. mit de L'Hospital zeigen).

(b) Es gilt:

$$\langle A_\alpha x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j x_j y_j = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \alpha^j y_j = \langle x, A_\alpha y\rangle$$

(c) Betrachte 4 Fälle:

Falls $\alpha = 1$, so ist $A_\alpha = \mathrm{id}_{\ell^2}$ und entsprechend ist 1 der einzige Eigenwert und ℓ^2 der zugehörige Eigenraum. Für $\alpha = 0$ ist A_α der Nulloperator und hat nur den Eigenwert 0, wieder mit ℓ^2 als Eigenraum.

Falls $\alpha = -1$, so gilt $A_\alpha x = \lambda x$ genau dann, wenn für alle $j \in \mathbb{N}$, $(-1)^j x_j = \lambda x_j$ gilt. Entsprechend gibt es nur die Eigenwerte $1, -1$. Die Eigenvektoren zu 1 sind diejenigen $x \neq 0$ für die $x_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, die zu -1 sind die, wo $x_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Falls $|\alpha| < 1$ und $\alpha \neq 0$, so ist $A_\alpha x = \lambda x$ genau dann, wenn $\alpha^j x_j = \lambda x_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Da die α^j paarweise verschieden sind, gilt das genau dann, wenn für alle $j \in \mathbb{N}$ entweder

$$\lambda = \alpha^j \text{ oder } x_j = 0 \text{ gilt.}$$

Die Eigenwerte sind also α^j, die zugehörigen Eigenvektoren sind die, die genau an der j-ten Stelle von 0 verschiedene Einträge haben.

(d) Für $|\alpha| > 1$ ist der Operator nicht wohldefiniert, kann also nicht kompakt sein.

Für $|\alpha| = 1$ gilt

$$A_\alpha^2 x = \left(\alpha^{2j} x_j\right)_{j\in\mathbb{N}} = x,$$

also $A_\alpha^2 = \mathrm{id}_{\ell^2}$. Falls also A_α kompakt wäre, so wäre auch id_{ℓ^2} kompakt. Das ist aber nicht möglich, da die Einheitskugel in ℓ^2 nicht kompakt ist.

Es bleibt der Fall $|\alpha| < 1$. Sei $\Omega \subset B_C(0) \subset \ell^2$ für ein $C > 0$. Wir wollen mit Hilfe des Hinweises zeigen, dass $M := \overline{A_\alpha \Omega}$ kompakt ist.

1. Für $x \in \Omega$ gilt nach (a), dass $\|A_\alpha x\| \leq |\alpha| \, \|x\| \leq |\alpha| \, C$ ist, entsprechend gilt $A_\alpha \Omega \subset \overline{B_{|\alpha|C}(0)}$ und damit auch $M \subset \overline{B_{|\alpha|C}(0)}$, d.h. M ist beschränkt.
2. Per Definition ist M abgeschlossen.
3. Zeige zunächst $\forall \varepsilon > 0 \ \exists m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{j=m_0+1}^{\infty} |\xi_j|^2 \overset{!}{<} \varepsilon \text{ für alle } y = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in A_\alpha \Omega. \qquad (*)$$

Da $y = A_\alpha x$ für $x = (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Omega$, ist $(*)$ äquivalent zu

$$\sum_{j=m_0+1}^{\infty} \left|\alpha^j \eta_j\right|^2 \overset{!}{<} \varepsilon \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $|\alpha| < 1$ ist, existiert $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left(|\alpha|^{m_0+1}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{C^2}$. Damit gilt

$$\sum_{j=m_0+1}^{\infty} \left|\alpha^j \eta_j\right|^2 \leq \left(|\alpha|^{m_0+1}\right)^2 \underbrace{\sum_{j=m_0+1}^{\infty} \left|\eta_j\right|^2}_{\leq \|x\|_{\ell^2}^2 \leq C^2} < \varepsilon,$$

womit $(*)$ gezeigt ist.

Approximationsargument:

Setze nun $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{4}$ und $\tilde{m}_0 = m_0(\frac{\varepsilon}{4})$. Dann gilt für $y = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in M$ beliebig, dass ein $x = (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Omega$ existiert mit $\|A_\alpha x - y\|_{\ell^2}^2 < \tilde{\varepsilon}$ und entsprechend wegen $|a|^2 \leq |a-b|^2 + 2\,|a-b| \cdot |b| + |b|^2 \leq 2\,|a-b|^2 + 2\,|b|^2$ folgt

$$\sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{\infty} |\xi_j|^2 \leq 2 \sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{\infty} \left|\xi_j - \alpha^j \eta_j\right|^2 + 2 \sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{\infty} \left|\alpha^j \eta_j\right|^2 < 4\tilde{\varepsilon} = \varepsilon,$$

was zu zeigen war.

****

Alternatives Approximationsargument: Für $y = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in M = \overline{A_\alpha \Omega}$ beliebig wähle $y_n = (\xi_j^{(n)})_{j\in\mathbb{N}} \in A_\alpha\Omega$ mit $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ in ℓ^2. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\tilde{m}_0 = m_0(\frac{\varepsilon}{2})$ mit $(*)$. Dann gilt:

$$\sum_{j=\tilde{m}_0+1} |\xi_j|^2 = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=\tilde{m}_0+1} \left|\xi_j^{(n)}\right|^2}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon,$$

womit 3. vom Hinweis gezeigt ist.

Alternative zu 3.

Behauptung: $\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{j=m_0+1}^{\infty} |y_j|^2 \overset{!}{<} \varepsilon \text{ für alle } y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in M = \overline{A_\alpha\Omega}.$$

Für $x \in \Omega$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \alpha^{2j} |x_j|^2 \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \alpha^{2j} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{j=m+1}^{\infty} \alpha^{2j} \|x\|_{\ell^2}^2 \leq C^2 \sum_{j=m+1}^{\infty} \alpha^{2j} \tag{$**$}$$

Betrachte für $|q| < 1$ die geometrische Summenformel $\sum_{j=0}^{m} q^j = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$ und die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$, dann ergibt sich

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} q^j = q^{m+1} \cdot \frac{1}{1-q} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Für $q = \alpha^2$ ergibt sich, dass für alle $\hat{\varepsilon} > 0$ ein $m_0 = m_0(\hat{\varepsilon}) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\sum_{j=m_0+1}^{\infty} \alpha^{2j} < \hat{\varepsilon}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Für jedes $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in M$ existiert $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Omega$, sodass $\|A_\alpha x - y\|_{\ell^2}^2 < \frac{\varepsilon}{4}$ und insbesondere

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \left|\alpha^j x_j - y_j\right|^2 < \frac{\varepsilon}{4} \text{ für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Setze nun $\hat{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{4C^2}$, dann folgt für $\tilde{m}_0 = m_0(\frac{\varepsilon}{4C^2})$

$$\sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{\infty} |y_j|^2 \leq 2 \sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{\infty} \left|\alpha^j x_j - y_j\right|^2 + 2 \sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{\infty} \alpha^{2j} |x_j|^2 \overset{(**)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + 2C^2\hat{\varepsilon} = \varepsilon,$$

was zu zeigen war.