RWTH AACHEN

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
maier@instmath.rwth-aachen.de

B. Sc. 28.04.2021
SoSe 2020

Klausur: Höhere Mathematik IV

Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1
Seien $\alpha \in \left\{8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}\right\}$ und $\beta \in \{1, -1\}$. Für welche $z = x + iy \in N \subset \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = e^{\alpha ix} + \beta i e^{\alpha iy}$$

holomorph? Geben Sie den Index j für $N_j \subset \mathbb{C}$ in folgender Liste an:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \mathbb{C}\\
N_2 &= \left\{(x,y): \ x = y = 0\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_3 &= \left\{(x,y): \ x = y\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_4 &= \left\{(x,y): \ x = -y\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_5 &= \left\{(x,y): \ x \in \mathbb{R},\ y = x + k\pi/4 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_6 &= \left\{(x,y): \ x \in \mathbb{R},\ y = x + k\pi/2 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_7 &= \left\{(x,y): \ x \in \mathbb{R},\ y = x + k\pi \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_8 &= \left\{(x,y): \ x \in \mathbb{R},\ y = x + 2k\pi \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_9 &= \left\{(x,y): \ x \in \mathbb{R},\ y = x + 4k\pi \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_{10} &= \left\{(x,y): \ x \in \mathbb{R},\ y = x + \pi/8 + k\pi/4 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_{11} &= \left\{(x,y): \ x \in \mathbb{R},\ y = x + \pi/4 + k\pi/2 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_{12} &= \left\{(x,y): \ x \in \mathbb{R},\ y = x + \pi/2 + k\pi \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_{13} &= \left\{(x,y): \ x \in \mathbb{R},\ y = x + \pi + 2k\pi \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_{14} &= \left\{(x,y): \ x \in \mathbb{R},\ y = x + 2\pi + 4k\pi \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_{15} &= \left\{(x,y): \ x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad y = x^2\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_{16} &= \left\{(x,y): \ y \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x = y^2\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_{17} &= \left\{(x,y): \ x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad y = x^4\right\} \subset \mathbb{C}\\
N_{18} &= \left\{(x,y): \ y \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x = y^4\right\} \subset \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Lösung
Zunächst definieren wir $u(x,y) := \mathrm{Re}(f(x+iy))$ sowie $v(x,y) := \mathrm{Im}((f(x+iy)))$ für $z = x+iy \in \mathbb{C}$. Wegen Euler gilt

$$\begin{aligned}
f(x+iy) &= \cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x) - \beta\sin(\alpha y) + \beta\, i\cos(\alpha y)\\
&= \big(\cos(\alpha x) - \beta\sin(\alpha y)\big) + i\big(\sin(\alpha x) + \beta\cos(\alpha y)\big)
\end{aligned}$$

und es folgt

$$u(x,y) = \cos(\alpha x) - \beta\sin(\alpha y) \qquad \text{und} \qquad v(x,y) = \sin(\alpha x) + \beta\cos(\alpha y)$$

für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann ist $(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ offenbar differenzierbar und f somit genau dann in $z = x + iy \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, d.h. es gilt $(x, y) \in N$, falls u und v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\, u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\, v(x,y), \\ \frac{\partial}{\partial x}\, v(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}\, u(x,y) \end{cases} \tag{CR}$$

für $z = x + iy$ erfüllen. Wenn wir u und v in die Gleichungen (CR) einsetzen, erhält man, dass

$$\left.\begin{array}{rcl} -\alpha\sin(\alpha x) & = & -\alpha\beta\sin(\alpha y) \\ \alpha\cos(\alpha x) & = & \alpha\beta\cos(\alpha y) \end{array}\right\} \iff \begin{cases} \sin(\alpha x) = \beta\sin(\alpha y) \\ \cos(\alpha x) = \beta\cos(\alpha y) \end{cases} \tag{1}$$

erfüllt ist.

1. <u>*Fall* $\beta = 1$</u>: Da $\sin(\alpha\cdot)$ und $\cos(\alpha\cdot)$ beide $\frac{2\pi}{\alpha}$–periodisch sind, gilt (1) für

$$y = x + \frac{2k\pi}{\alpha} \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{beliebig}\,. \tag{2}$$

   Andererseits sind das bereits alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die (1) erfüllen, da die Kurve

$$h(z) := \underbrace{\Big(\sin(\alpha z)\,,\ \cos(\alpha z)\Big)}_{= e^{\alpha z i} \in \mathbb{C}} \in \mathbb{R}^2, \quad z \in \mathbb{R} \tag{3}$$

   $\frac{2\pi}{\alpha}$–periodisch und für $z \in \big[0, \frac{2\pi}{\alpha}\big)$ injektiv ist.

2. <u>*Fall* $\beta = -1$</u>: In diesem Fall können wir wegen $\sin(z) = -\sin(z + \pi)$, bzw. $\cos(z) = -\cos(z + \pi)$ (1) umformulieren zu

$$\left.\begin{array}{rcl} \sin(\alpha x) & = & -\sin(\alpha y) \\ \cos(\alpha x) & = & -\cos(\alpha y) \end{array}\right\} \iff \begin{cases} \sin(\alpha x) = \sin(\alpha y + \pi) \\ \cos(\alpha x) = \cos(\alpha y + \pi), \end{cases} \tag{4}$$

   was wieder wegen der $\frac{2\pi}{\alpha}$–Periodizität von $\sin(\alpha\cdot)$ und $\cos(\alpha\cdot)$ für

$$y = x + \frac{(2k+1)\pi}{\alpha}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{5}$$

   erfüllt ist. Wie oben im 1. Fall argumentiert (vgl. (3)), hat man damit bereits alle Lösungen.

Schließlich können wir die Lösungsindizes j von $N = N_j$ abhängig von den beiden Parametern α und β aus der Liste ablesen.

$\beta \setminus \alpha$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$
1	5	6	7	8	9
-1	10	11	12	13	14

Aufgabe 2

Seien $(\alpha, \beta) \in \big\{(1,-2), (1,2), (-1,-2), (-1,2), (2,-2), (2,2), (2,-1), (-2,-2), (-2,2),\ (-2,-1)\big\}$.
Entwickeln Sie

$$f(z) \;=\; \frac{1}{(z-\alpha\sqrt{2})^3}$$

in $a = \beta i$ in eine Laurent-Reihe für z mit $|z-a| > \sqrt{2\alpha^2+\beta^2}$ und bestimmen Sie die Laurent-Reihe von f in der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{k_0} c_k \cdot (z-a)^k.$$

Geben Sie k_0 an und wählen Sie c_k aus der folgenden Tabelle.

Fall	Koeffizienten		Fall	Koeffizienten
1	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(\sqrt{2}+2i\right)^{3+k}}$		11	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(2\sqrt{2}-i\right)^{2+k}}$
2	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(\sqrt{2}-2i\right)^{3+k}}$		12	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(-2\sqrt{2}-i\right)^{2+k}}$
3	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(\sqrt{2}-i\right)^{3+k}}$		13	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2^{4+k}\left(i-\sqrt{2}\right)^{3+k}}$
4	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(\sqrt{2}+i\right)^{3+k}}$		14	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2^{4+k}\left(-\sqrt{2}-i\right)^{3+k}}$
5	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(-\sqrt{2}+2i\right)^{3+k}}$		15	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(-\sqrt{2}-i\right)^{3+k}}$
6	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(-\sqrt{2}-2i\right)^{3+k}}$		16	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(-\sqrt{2}+i\right)^{3+k}}$
7	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(-\sqrt{2}-i\right)^{2+k}}$		17	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(2\sqrt{2}+i\right)^{3+k}}$
8	$c_k = \frac{(k+1)\,k}{2\left(-\sqrt{2}+i\right)^{2+k}}$		18	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(i-2\sqrt{2}\right)^{3+k}}$
9	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2^{4+k}\left(\sqrt{2}+i\right)^{3+k}}$		19	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(\sqrt{2}+2i\right)^{2+k}}$
10	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2^{4+k}\left(\sqrt{2}-i\right)^{3+k}}$		20	$c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(\sqrt{2}-2i\right)^{2+k}}$

Falls keine der angegebenen Varianten zutreffen, tragen Sie als Wert 0 ein.

Lösung

Zunächst sei $r := \sqrt{2\alpha^2+\beta^2} > 0$ sowie $A := K_{r,\infty}(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a|\}$. Unter Verwendung der unteren Dreiecksungleichung gilt dann

$$\left|z-\alpha\sqrt{2}\right| \geq |z-a| - \left|a-\alpha\sqrt{2}\right| = |z-a| - r > 0$$

für alle $z \in A$, sodass $f : A \longmapsto \mathbb{C}$ wohldefiniert und holomorph ist. Somit lässt sich f nach *Satz 12.7.2* für alle $z \in A$ als Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt a darstellen. Um diese zu bestimmen, verwenden wir

$$f(z) \;=\; \frac{1}{(z-\alpha\sqrt{2})^3} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z-\alpha\sqrt{2}}\right). \tag{6}$$

Die Laurent–Entwicklung der Funktion $g(z) = \frac{1}{z-z_0}$ um den Punkt a im Außengebiet ist aus der Vorlesung bekannt:

$$g(z) \;=\; \frac{1}{z-z_0} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \big(z_0-a\big)^n \big(z-a\big)^{-(n+1)},\ z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(a)}\,.$$

Für $z_0 = \alpha\sqrt{2}$ ergibt das

$$\frac{1}{z-\alpha\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^n (z-a)^{-n-1} = \sum_{m=-\infty}^{0} \frac{1}{\left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^m}(z-a)^{m-1} \tag{7}$$

und somit gilt

$$f(z) \overset{(6)}{=} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z-\alpha\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\sum_{m=-\infty}^{0} \frac{1}{\left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^m}(z-a)^{m-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{0} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{\left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^m}(z-a)^{m-1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{0} \frac{d}{dz}\left(\frac{m-1}{\left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^m}(z-a)^{m-2}\right)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{0} \frac{(m-1)(m-2)}{2\left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^m}(z-a)^{m-3} = \sum_{k=-\infty}^{-3} \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^{3+k}}(z-a)^k$$

für alle $z \in A$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung nach *Satz 12.7.2* folgt $k_0 = -3$ sowie

$$c_k = \begin{cases} \frac{(k+1)(k+2)}{2\left(\alpha\sqrt{2}-\beta i\right)^{3+k}}, & \text{falls} \quad k \leq k_0, \\ 0, & \text{falls} \quad k > k_0. \end{cases}$$

Nachfolgend geben wir den entsprechenden Fall in der obigen Tabelle in Abhängigkeit von den Parametern (α, β) an:

(α,β)	$(1,-2)$	$(1,2)$	$(-1,-2)$	$(-1,2)$	$(2,-2)$	$(2,2)$	$(2,-1)$	$(-2,-2)$	$(-2,2)$	$(-2,-1)$
Fall	1	2	5	6	9	10	17	13	14	18

Alternative zur Bestimmung von (7)

Schreiben wir

$$\frac{1}{z-\alpha\sqrt{2}} = \frac{1}{(z-a)-(\alpha\sqrt{2}-a)} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha\sqrt{2}-a}{z-a}}, \qquad z \in A$$

lässt sich wegen

$$\left|\frac{\alpha\sqrt{2}-a}{z-a}\right| = \frac{r}{|z-a|} < 1 \quad \text{für} \quad z \in A$$

die geometrische Reihe verwenden

$$\frac{1}{z-\alpha\sqrt{2}} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha\sqrt{2}-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha\sqrt{2}-a}{z-a}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha\sqrt{2}-a\right)^n (z-a)^{-n-1}.$$

Aufgabe 3
Sei $\alpha \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3\right\}$. Berechnen Sie mithilfe des Residuensatzes die folgenden zwei komplexen Kurvenintegrale I und J und geben Sie deren Werte an:
Variante 1:

$$I = I_1 := \oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^3(1-\alpha z^2)^4} \qquad \text{und} \qquad J = J_1 := \oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{dz}{z^{10}(1-\alpha z^2)^2}$$

Variante 2:

$$I = I_2 := \oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{dz}{z^8(1-\alpha z^2)^3} \qquad \text{und} \qquad J = J_2 := \oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^5(1-\alpha z^2)^3}$$

Lösung
Zunächst definieren wir $f_j,\ g_j \colon \mathbb{C} \setminus \left\{0, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right\} \longmapsto \mathbb{C}\,,\ j = 1,2$, gegeben durch

$$f_1(z) := \frac{1}{z^3(1-\alpha z^2)^4} \qquad \text{und} \qquad g_1(z) := \frac{1}{z^{10}(1-\alpha z^2)^2}\,,$$

sowie

$$f_2(z) := \frac{1}{z^8(1-\alpha z^2)^3} \qquad \text{und} \qquad g_2(z) := \frac{1}{z^5(1-\alpha z^2)^3}.$$

Dann sind f_j und g_j offenbar holomorph, da 0 und $\pm\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ gerade die Definitionslücken bzw. Pole der beiden Funktionen sind. Nun gilt

$$\left|\pm\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 0\right| > \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

und die den Kurvenintegralen I und J zugrunde liegenden Kurven sind beide einfach geschlossen, positiv orientiert und regulär. Dann ergibt sich mit dem Residuensatz (siehe *Satz 12.8.3*)

$$I = I_j = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\big(f_j, 0\big) \qquad \text{und} \qquad J = J_j = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\big(g_j, 0\big), \quad j = 1,2. \tag{8}$$

Um diese Residuen zu berechnen, verwenden wir die geometrische Reihe, welche für $\left|\alpha z^2\right| < 1$ die folgende Darstellung liefert,

$$\frac{1}{1-\alpha z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{2n}, \quad |z| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,, \tag{9}$$

welche nur gerade Potenzen in z hat. Damit hat die Laurent–Entwicklung um Null sowohl von g_1, als auch von f_2 keinen Beitrag bei z^{-1}. Es folgt:

$$\operatorname{Res}(g_1, 0) = 0 = \operatorname{Res}(f_2, 0)\,, \quad \text{also mit (8)} \quad J_1 = I_2 = 0\,. \tag{10}$$

Nach (9) gibt aber auch

$$\frac{1}{\left(1-\alpha z^2\right)^3} = \left(1 + \alpha z^2 + \alpha^2 z^4 + O(z^6)\right)^3 = 1 + 3\alpha z^2 + 6\alpha^2 z^4 + O(z^6).$$

Es folgt sofort

$$\operatorname{Res}(g_2, 0) \;=\; 6\alpha^2, \quad \text{also wieder mit (8)} \quad J_2 = 12\alpha^2 \pi\, i\,. \tag{11}$$

Analog ist

$$\frac{1}{\left(1-\alpha z^2\right)^4} \;=\; 1 \,+\, 4\alpha z^2 + O\big(z^4\big),$$

womit $\operatorname{Res}(f_1, 0) = 4\alpha$ folgt, d.h. $I_1 = 8\alpha\,\pi\, i$.

Nachfolgend geben wir die Werte von $I = I_j$ und $J = J_j\,,\; j = 1, 2$, in Abhängigkeit von den Varianten und dem Parameter α an:

<u>Werte von I:</u>

Variante \ α	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	3
Variante 1	$2\pi i$	$\frac{8}{3}\pi i$	$4\pi i$	$16\pi i$	$24\pi i$
Variante 2	0	0	0	0	0

<u>Werte von J:</u>

Variante \ α	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	3
Variante 1	0	0	0	0	0
Variante 2	$\frac{3}{4}\pi i$	$\frac{4}{3}\pi i$	$\frac{1}{3}\pi i$	$48\pi i$	$108\pi i$

Alternative z.B. für $\operatorname{Res}(f_1, 0)$:

Mit *Lemma 12.8.5* erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\big(f_1, 0\big) &= \frac{1}{2!} \cdot \lim_{z\to 0} \left[\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3 f_1(z)\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 0} \left[\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{(1-\alpha z^2)^4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 0} \left[\frac{d}{dz}\left(\frac{8\alpha z}{(1-\alpha z^2)^5}\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 0} \left[\frac{8\alpha(1-\alpha z^2)^5 + 80\alpha^2 z^2 (1-\alpha z^2)^4}{(1-\alpha z^2)^{10}}\right] \\
&= 4\alpha.
\end{aligned} \tag{12}$$

Aufgabe 4
Sei $\alpha \in \{-6,-5,-4,-3,-2,2,3,4,5,6\}$. Ferner sei P_2 der reelle Hilbertraum der Polynome vom Höchstgrad 2 mit dem von $L^2(0,1)$ geerbten Skalarprodukt

$$\langle\, p, q \,\rangle_{L^2(0,1)} \;=\; \int\limits_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx\,, \qquad p,q \in P_2\,.$$

Des Weiteren seien $p_i(x) = x^i\,,\ i = 0,1,2$ die Monome in P_2 und $U := \operatorname{span}\{p_0, p_1\}$ ein Unterraum. Bestimmen Sie zu $p(x) \;:=\; \alpha\sqrt{2}\,x^2$ ein $p^* \in U$, so dass

$$\|p^* - p\|_{L^2(0,1)} \;=\; \min_{q\in U}\, \|q - p\|_{L^2(0,1)} \tag{13}$$

und geben Sie p^* in Abhängigkeit von x an.

Lösung
Zunächst ist auch $\big(U, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle_{L^2(0,1)}\big)$ ein Hilbertraum, da U ein endlich-dimensionaler Unterraum von P_2 ist. Mit *Satz 13.2.7* folgt somit, dass ein eindeutiges Polynom $p^* \in U$ existiert, das (13) erfüllt. Ferner gilt dann $p - p^* \perp U$, das äquivalent zu

$$\begin{cases} \langle\, p - p^*, p_0 \,\rangle_{L^2(0,1)} = 0, \\ \langle\, p - p^*, p_1 \,\rangle_{L^2(0,1)} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

ist, da $\{p_0, p_1\}$ eine Basis von U bildet. Nun sei $p^*(x) := ap_0(x) + bp_1(x) = a + bx$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Mittels Einsetzen von p und p^* in (14) und einfachen Umformungen ergibt sich

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} = \int\limits_0^1 (a+bx)\cdot 1\,dx = \int\limits_0^1 \alpha\sqrt{2}x^2\cdot 1\,dx = \alpha\frac{\sqrt{2}}{3}, \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \int\limits_0^1 (a+bx)\cdot x\,dx = \int\limits_0^1 \alpha\sqrt{2}x^2\cdot x\,dx = \alpha\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

und somit

$$\begin{cases} a = \alpha\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{b}{2}, \\ \alpha\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \left(\alpha\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{b}{4}\right) + \frac{b}{3} = \alpha\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{b}{12}. \end{cases} \tag{15}$$

Wenn wir die zweite Gleichung nach b umformen, erhalten wir $b = \alpha\sqrt{2}$, das eingesetzt in die erste Gleichung von (15)

$$a = \alpha\frac{\sqrt{2}}{3} - \alpha\frac{\sqrt{2}}{2} = -\alpha\frac{\sqrt{2}}{6}$$

liefert. Insgesamt gilt daher $p^*(x) = \alpha\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{6}\right)$.

<u>*1.Alternative:*</u> Zunächst ist auch $\big(U, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle_{L^2(0,1)}\big)$ ein Hilbertraum, da U ein endlich-dimensionaler Unterraum von P_2 ist. Mit *Satz 13.2.7* folgt somit, dass ein eindeutiges Polynom $p^* \in U$ existiert, das (13) erfüllt. Dabei ist p^* eindeutig durch die Bedingung $p - p^* \perp U$ bestimmt.

Um p^* zu berechnen, bestimmen wir die (orthogonale) Projektion $\mathrm{Proj}_U(p)$ von p auf U; denn es gilt $p - \mathrm{Proj}_U(p) \perp U$ nach *Korollar 13.2.11*, das $p^* = \mathrm{Proj}_U(p)$ impliziert. Wegen *Satz 13.2.9* ist es nun sinnvoll, zuerst eine Orthogonalbasis $\{q_0, q_1, q_2\}$ von P_2 mit

$$U = \mathrm{span}\{p_0, p_1\} = \mathrm{span}\{q_0, q_1\}$$

zu bestimmen, die wir mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren berechnen:

$$\begin{aligned}
q_0(x) &:= p_0(x) = 1, \\
q_1(x) &:= p_1(x) - \frac{\langle q_0, p_1 \rangle_{L^2(0,1)}}{\langle q_0, q_0 \rangle_{L^2(0,1)}} q_0(x) = x - \frac{1}{2}, \\
q_2(x) &:= p_2(x) - \frac{\langle q_0, p_2 \rangle_{L^2(0,1)}}{\langle q_0, q_0 \rangle_{L^2(0,1)}} q_0(x) - \frac{\langle q_1, p_2 \rangle_{L^2(0,1)}}{\langle q_1, q_1 \rangle_{L^2(0,1)}} q_1(x) = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} \left(x - \frac{1}{2} \right) = x^2 - x + \frac{1}{6}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Dann können wir

$$\begin{aligned}
p(x) = \alpha\sqrt{2}x^2 &= \alpha\sqrt{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) + \alpha\sqrt{2}x - \alpha\frac{\sqrt{2}}{6} = \alpha\sqrt{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) + \alpha\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \alpha\frac{\sqrt{2}}{3} \\
&= \underbrace{\alpha\sqrt{2}q_2(x)}_{\in\, U^\perp} + \underbrace{\alpha\sqrt{2}q_1(x) + \alpha\frac{\sqrt{2}}{3}q_0(x)}_{\in\, U}
\end{aligned}$$

schreiben. Nach *Satz 13.2.9* ergibt sich somit

$$p^*(x) = \left(\mathrm{Proj}_U(p)\right)(x) = \alpha\sqrt{2}q_1(x) + \alpha\frac{\sqrt{2}}{3}q_0(x) = \alpha\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{6}\right).$$

__2.Alternative:__ Zunächst ist auch $\left(U, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(0,1)}\right)$ ein Hilbertraum, da U ein endlich-dimensionaler Unterraum von P_2 ist. Mit *Satz 13.2.7* folgt somit, dass ein eindeutiges Polynom $p^* \in U$ existiert, das (13) erfüllt. Dabei ist p^* eindeutig durch die Bedingung $p - p^* \perp U$ bestimmt.

Um p^* zu berechnen, bestimmen wir die (orthogonale) Projektion $\mathrm{Proj}_U(p)$ von p auf U; denn es gilt $p - \mathrm{Proj}_U(p) \perp U$ nach *Korollar 13.2.11*, das $p^* = \mathrm{Proj}_U(p)$ impliziert. Nun erhält man mit Hilfe von (16) sofort ein Orthonormalsystem von U:

$$\begin{aligned}
e_0^*(x) &:= \frac{q_0(x)}{\|q_0\|_{L^2(0,1)}} = q_0(x) = 1, \\
e_1^*(x) &:= \frac{q_1(x)}{\|q_1\|_{L^2(0,1)}} = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Damit lässt sich die orthogonale Projektion $\mathrm{Proj}_U(p)$ leicht angeben:

$$p^* = \mathrm{Proj}_U(p) = \langle p, e_1^* \rangle_{L^2(0,1)} \cdot e_1^* + \langle p, e_0^* \rangle_{L^2(0,1)} \cdot e_0^*. \tag{17}$$

Die Koeffizienten berechnen wir dabei getrennt:

$$\begin{aligned}
\langle p, e_1^* \rangle_{L^2(0,1)} &= 2\alpha\sqrt{6} \int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\alpha\sqrt{6}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = 2\alpha\sqrt{6} \cdot \frac{1}{12} = \frac{\alpha}{6}\sqrt{6}, \\
\langle p, e_0^* \rangle_{L^2(0,1)} &= \alpha\sqrt{2} \int_0^1 x^2\, dx = \frac{\alpha}{3}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Aus (17) folgt dann

$$p^*(x) = \frac{\alpha}{6}\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha}{3}\sqrt{2} = \alpha\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{6}\right).$$

Nachfolgend geben wir $p^*(x)$ in Abhängigkeit vom Parameter α an:

α	-6	-5	-4	-3	-2	2	3	4	5
p^*	$\sqrt{2}(1-6x)$	$\sqrt{2}(\frac{5}{6}-5x)$	$\sqrt{2}(\frac{2}{3}-4x)$	$\sqrt{2}(\frac{1}{2}-3x)$	$\sqrt{2}(\frac{1}{3}-2x)$	$\sqrt{2}(2x-\frac{1}{3})$	$\sqrt{2}(3x-\frac{1}{2})$	$\sqrt{2}(4x-\frac{2}{3})$	$\sqrt{2}(5x-\frac{5}{6})$

α	6
p^*	$\sqrt{2}(6x-1)$

Aufgabe 5
Seien $\alpha \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ und $\beta \in \{2,3,4,5,6\}$. Ferner seien $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto h(t)$ mit

$$h(t) := t^2 \cdot e^{-\beta\alpha|t|}$$

gegeben.
Berechnen Sie die Spektralfunktion $\widehat{h} = \mathcal{F}[h]$ von h.
Das Ergebnis ist von der Form

$$\widehat{h}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a(\omega)}{(\beta^2\alpha^2 + \omega^2)^k}. \tag{18}$$

Geben Sie $k \in \mathbb{N}$ und $a = a(\omega)$ an. Schreiben Sie dabei $a(\omega)$ als $a(x)$, d.h. nutzen Sie x als Variable.

Lösung
Zunächst definieren wir $\gamma := \alpha\beta > 0$ und

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) := e^{-\gamma|t|}.$$

Dann ist f zum Einen offenbar absolut integrierbar auf $\mathbb{R}$ und differenzierbar für $t \neq 0$ und zum Anderen wissen wir aus *Beispiel 13.4.7*, dass f Fourier-transformierbar ist mit Spektralfunktion $\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\gamma}{\gamma^2+\omega^2}$ für $\omega \in \mathbb{R}$. Im nächsten Schritt wenden wir *Satz 13.4.8 (ii)* an und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[h](\omega) = \mathcal{F}[t^2 f(t)](\omega) = i^2 \frac{d^2}{d\omega^2} \widehat{f}(\omega) &= -\frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{-2\gamma\omega}{(\gamma^2+\omega^2)^2}\right) \\
&= 2\gamma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\gamma^2+\omega^2)^2 - \omega \cdot 2(\gamma^2+\omega^2)\cdot 2\omega}{(\gamma^2+\omega^2)^4} \\
&= 2\gamma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\gamma^2 - 3\omega^2}{(\gamma^2+\omega^2)^3} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\beta\alpha(\beta^2\alpha^2 - 3\omega^2)}{(\beta^2\alpha^2+\omega^2)^3}
\end{aligned}$$

für $\omega \in \mathbb{R}$. Somit muss in (18) $k = 3$ und $a(\omega) = 2\beta\alpha(\beta^2\alpha^2 - 3\omega^2)$ für $\omega \in \mathbb{R}$ sein.

Nachfolgend geben wir nicht $a(\omega),\ \omega \in \mathbb{R}$, sondern $a(x),\ x \in \mathbb{R}$, in Abhängigkeit von den Parametern α und β an:

$\alpha \setminus \beta$	2	3	4	5	6
$\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}(8-3x^2)$	$6\sqrt{2}(18-3x^2)$	$8\sqrt{2}(32-3x^2)$	$10\sqrt{2}(50-3x^2)$	$12\sqrt{2}(72-3x^2)$
$\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}(12-3x^2)$	$6\sqrt{3}(27-3x^2)$	$8\sqrt{3}(48-3x^2)$	$10\sqrt{3}(75-3x^2)$	$12\sqrt{3}(108-3x^2)$

Aufgabe 6
Für $\alpha \in \{1, 2\}$ und $\beta \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$ sei $f \in H^1(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$f(t) = \max\{\beta - \alpha\,|t|\,, 0\},$$

$t \in \mathbb{R}$ und $\hat{f} = \hat{f}(\omega)$ die zugehörige Spektralfunktion. Berechnen Sie (wenn möglich ohne $\hat{f}$ explizit zu bestimmten) das Integral

$$B := \int_{\mathbb{R}} (1+\omega^2) \cdot \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \,\mathrm{d}\omega.$$

Lösung
Für die schwache Ableitung $\partial f \in L^2(\mathbb{R})$ von f gilt:

$$\partial f(t) = \begin{cases} \alpha, & t \in (-\frac{\beta}{\alpha}, 0) \\ -\alpha, & t \in (0, \frac{\beta}{\alpha}) \\ 0, & |t| > \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}.$$

Damit folgt analog zu Folgerung 13.4.27

$$\begin{aligned} B &= \int_{\mathbb{R}} (1+\omega^2) \cdot \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \,\mathrm{d}\omega =< f, f >_{H^1(\mathbb{R})} = \int_{-\beta/\alpha}^{\beta/\alpha} (\beta - \alpha\,|t|)^2 \,\mathrm{d}t + \int_{-\beta/\alpha}^{\beta/\alpha} \alpha^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \beta^2 \underbrace{\int_{-\beta/\alpha}^{\beta/\alpha} 1 \,\mathrm{d}t}_{=2\frac{\beta}{\alpha}} - 4\alpha\beta \underbrace{\int_{0}^{\beta/\alpha} t \,\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2}} + \alpha^2 \underbrace{\int_{-\beta/\alpha}^{\beta/\alpha} t^2 \,\mathrm{d}t}_{=\frac{2}{3}\frac{\beta^3}{\alpha^3}} + 2\alpha\beta. \end{aligned}$$

Also:

$$B = \frac{2\beta^3}{3\alpha} + 2\alpha\beta.$$

Nachfolgend geben wir B in Abhängigkeit von den Parametern α und β an:

$\alpha \setminus \beta$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$
1	$\frac{10\sqrt{2}}{3}$	$4\sqrt{3}$	$\frac{28}{3}$	$\frac{16\sqrt{5}}{3}$	$6\sqrt{6}$
2	$\frac{14\sqrt{2}}{3}$	$5\sqrt{3}$	$\frac{32}{3}$	$\frac{17\sqrt{5}}{3}$	$6\sqrt{6}$