Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 1998

Höhere Mathematik I, II, III, IV

---

1. Aufgabe: (2,5) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x^2 - 2x + 2}\;.$$

Man beweise, daß f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so angibt, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ gilt:

$$\big|f(x) \;-\; f(y)\big| \;<\; \varepsilon\;.$$

---

2. Aufgabe: (1,25) Berechnen Sie

$$\int_2^3 \frac{x - 7}{x^2 - 5x + 4}\, dx\;.$$

---

3. Aufgabe: (1,5) Beweisen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx} - 1} \quad , \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\;\;,$$

für $x > 0$ konvergiert und für $x < 0$ divergiert.

---

4. Aufgabe: (3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ und $g : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f\big(f(x)\big)$.

Berechnen Sie Maximum und Minimum von g .

---

5. Aufgabe: (3) Mit Hilfe der Taylorformel zeige man für

$$f(x) \;=\; \int_0^x \sqrt{5 - \sin^2 y}\; dy \quad (x \in \mathbb{R}) \;:$$

$$\big|f(x) - \sqrt{5}\, x\big| \;\leq\; \frac{5}{48}\, |x|^3 \quad (x \in \mathbb{R})\;.$$

---

6. Aufgabe: (2,5) Welches Volumen besitzt der Körper

$$K \;=\; \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 1 \;<\; xe^y \;<\; z \;<\; x^2 \;<\; 4\Big\}\;?$$

---

b i t t e   w e n d e n !

7. Aufgabe: **(a)** Man zeige, daß das Kurvenintegral

(3,5)

$$I(\mathcal{C}) \;=\; \int\limits_{\mathcal{C}} |yz|\; dx \;-\; |xz|\; dy \;+\; |xy|\; dz$$

im $\mathbb{R}^3$ vom Wege abhängig ist.

(b) Man berechne $I(\mathcal{C})$ für

$$\mathcal{C} \;:\; x \;=\; \sin^2 t\;,\; y \;=\; \cos^2 t\;,\; z \;=\; t \quad (0 \;\leq\; t \;\leq\; 2\pi)\;.$$

---

8. Aufgabe: Man gebe eine linear–gebrochene Abbdildung

(2)

$$w \;=\; f(z) \;=\; \frac{az \;+\; b}{cz \;+\; d}$$

an, welche die Halbebene

$$E \;=\; \{z \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Re} z \;>\; 2\}$$

auf das Äußere des Kreises

$$K \;=\; \big\{w \in \mathbb{C} \;:\; |w-1| \;=\; 1\big\}$$

abbildet.

---

9. Aufgabe: Gegeben sei die Funktion

(1,75)

$$f(z) \;=\; \frac{1}{1-\cos\,(2z)} \qquad \big(z \in \mathbb{C}\big)\;.$$

(a) Man beweise, daß f in $z=0$ einen Pol 2. Ordnung hat.

(b) Man bestimme das Residuum von f an der Stelle $z=0$.
