**Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen**
**Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans**
**Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 2000**

**Höhere Mathematik I, II, III, IV**

---

**Aufgabe 1:** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1, 0]$ .

(2) Man beweise:

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + x_j) \ \geq \ 1 \ + \ \sum_{j=1}^{n} x_j \quad .$$

---

**Aufgabe 2:** Man berechne

(3) **(a)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$ .

---

**Aufgabe 3:** Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \left( -\frac{1}{2} \right)^n .$$

---

**Aufgabe 4:** Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ , für die die Potenzreihe

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right)^n x^n$$

konvergiert.

---

**Aufgabe 5:** Gegeben seien die symmetrische Matrix

(3)
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \ , \quad A^2 = A \cdot A \quad \text{und} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Man beweise, daß das Gleichungssystem

$$r_1 A \ + \ r_2 A^2 \ + \ r_3 E \ = \ O$$

nicht–triviale Lösungen $(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ besitzt.

---

**b i t t e w e n d e n !!**

**Aufgabe 6:** (3,5)

**(a)** Gegeben sei die Abbildung

$$T: \begin{array}{rclcl} x & = & \xi\,(x^*, y^*) & = & x^* - x^* y^* \\ y & = & \eta\,(x^*, y^*) & = & x^* y^* \end{array} \quad .$$

Man berechne die inverse Abbildung $T^{-1}$ und $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x^*,y^*)}$ .

**(b)** Es sei $G$ das Gebiet, das von den Geraden $x + y = 1$ , $x + y = 2$ , $x = 0$ , $y = 0$ begrenzt wird und den Punkt $x = \frac{1}{2}$ , $y = 1$ enthält. Man berechne das Bild von $G$ unter der Abbildung $T^{-1}$ .

**(c)** Man berechne

$$\iint\limits_G \exp\left\{\frac{y}{x+y}\right\} dx\, dy \ .$$

---

**Aufgabe 7:** Gegeben sei das räumliche Gebiet

(2)

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < z < 2 \ , \ x^2 + y^2 \ < \ (2-z)^2\right\} .$$

$\partial K$ sei der Rand von $K$. Man berechne das Oberflächenintegral

$$\iint\limits_{\partial K} (x,y,z) \cdot \underline{n}\ do \quad ,$$

wenn $\underline{n}$ die äußere Normale auf $\partial K$ ist.

---

**Aufgabe 8:** Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(2,25)

**(a)** $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{x \ + \ \log x}{x^2}\, dx$ ; **(b)** $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{\arctan x}}\, dx$ .

---

**Aufgabe 9:** Bestimmen Sie die Laurentreihe zur Funktion

(2)

$$f(z) \ = \ z \ \sin^2 \frac{1}{z} \ + \ \frac{1}{z+1}$$

für $0 < |z| < 1$ .

(**Hinweis:** Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\cos 2z = 1 - 2\sin^2 z$)

---

**Aufgabe 10:** Man berechne die inverse Laplace–Transformation

(1,25)

$$L^{-1}\left\{\frac{8\lambda}{(\lambda-2)^2(\lambda+2)^2}\right\}(t) \ , \qquad \text{Re}\ \lambda \ > \ 2 \ .$$

---