Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 2001

Höhere Mathematik I, II, III, IV

Aufgabe 1: *(5)* Gegeben sei die Zahlenfolge $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n := \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{n}$.

Man beweise, daß die Zahlenfolge $\left\{S_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$S_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gegen Null konvergiert.

Aufgabe 2: *(7)* Man bestimme alle Eigenwerte und den zum kleinsten Eigenwert zugehörigen – normierten – Eigenvektor der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & 9 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3: *(9)* Gegeben sei die Funktion $f : \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } -\frac{3}{2} \le x < 1 , \\ 4x^3 - 2x^2 + 3x - 4 & \text{für } 1 \le x \le \frac{3}{2} . \end{cases}$$

Man beweise $f'_+(1) = 11$, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so angibt, daß

$$\left| \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - 11 \right| < \varepsilon$$

für alle x mit $1 < x < 1 + \delta$ gilt.

Aufgabe 4: *(5)* Gegeben sei die Fläche

$$z = f(x,y) = \frac{1}{xy} \qquad (x \cdot y \neq 0) .$$

Man bestimme diejenige Tangentialebene an die Fläche $z = f(x,y)$, welche parallel zur Ebene $x + y + z = 8$ ist.

---

b i t t e w e n d e n !!

Aufgabe 5: Mit Hilfe der Definition beweise man, daß die Funktion $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

(7)

$$f(x,y) = \begin{cases} 4 + 2y^2 \sin\dfrac{1}{y} + 3x^2 \cos\dfrac{1}{x} + 2x - 7y - 4x^2 + \sin(xy) & \text{für } x^2 + y^2 > 0 \\ 4 & \text{für } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist.

Aufgabe 6: Gegeben sei die Funktion

(17)

$$H(y) := \left(\int_0^y e^{-x^2}\, dx \right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-y^2(1+x^2)}}{1 + x^2}\, dx \qquad (y \geq 0)\ .$$

(a) Man beweise mit Hilfe der Leibnizregel: $H'(y) = C_0 \qquad (y \geq 0)$.
Welchen Wert hat C_0 ?

(b) Durch elementare Integration bestimme man $H(y)$ mit (a) .

(c) Man beweise: $\lim\limits_{y\to 0} H(y) = \lim\limits_{y\to\infty} H(y) = C_1$.
Welchen Zahlenwert hat C_1 ?

(d) Welchen Zahlenwert hat $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$?

Aufgabe 7: Gegeben sei das Vektorfeld

(10)

$$\underline{f} = \underline{f}(x,y) = |\, y - ax \,|\ (1,-1)\ , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a \in \mathbb{R}\ .$$

Mit dem 1. Hauptsatz über Kurvenintegrale bestimme man alle reellen Zahlen $a > 0$, für die

$$\int_\Gamma \underline{f}\ d\underline{x} \qquad (\Gamma \text{ Kurve im } \mathbb{R}^2)$$

im $\mathbb{R}^2$ vom Wege unabhängig ist.

Aufgabe 8: Gegeben seien das Vektorfeld

(9)

$$\underline{f} = \underline{f}(x,y) = \left(x^5 + y^3 + \cos(x^3)\ ,\ x^3 - 5x + e^{y^2}\right)\ , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,$$

und der im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Rand ∂G des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$.
Man berechne mit dem Gaußschen Satz

$$\int_{\partial G} \underline{f}\ d\underline{x}\ .$$

---

b i t t e w e n d e n !!

Aufgabe 9: Gegeben sei die Koordinatentransformation

(9)

$$T: \begin{array}{rcll} x &=& u^{2/3} & v^{1/3} \\ y &=& u^{1/3} & v^{2/3} \end{array} \quad , \quad (u, v > 0) \ .$$

(a) Man bestimme die Umkehrtransformation T^{-1} und $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

(b) Man bestimme das Bild der Parabeln

$$y^2 = 2x \ , \ y^2 = 4x \ , \ y = x^2, \ y = 4x^2 \quad (x, y > 0)$$

in der (u, v)–Ebene .

(c) Man berechne den Flächeninhalt des endlichen Gebietes zwischen den 4 Parabeln durch Gebietstransformation .

Aufgabe 10: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(7)

$$\int_0^\infty \frac{\sin\ \dfrac{1}{x}}{(1+x)\sqrt{\log\ (1+x)}}\ dx \ .$$

Aufgabe 11: Man bestimme alle linear–gebrochenen Abbildungen

(5)

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \ ,$$

die folgende drei Eigenschaften gleichzeitig erfüllen:

(i) $f(z)$ ist auf $\mathbb{C}$ konform ;

(ii) $f\Big(\big\{ z \in \mathbb{C} : |\ z\ | < 1 \big\}\Big) \ = \ \big\{ z \in \mathbb{C} : |\ z - 1\ | < 1 \big\}$;

(iii) für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(ix) \in \mathbb{R}$.
