Teil B

Höhere Mathematik III + IV,
Numerische Mathematik,
Prof. Dr. J. Bemelmans

1. Aufgabe: Gegeben seien das Vektorfeld

$$(1,5) \quad \underline{a}(x, y, z) = (2ye^z, -2x + 3z, ye^z) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

und die Fläche

$$F = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z \geq 0, x^2 + y^2 + z = 4\}.$$

Mit Hilfe des Stokesschen Satzes berechne man

$$\iint_F (\operatorname{rot} \underline{a}, \underline{n}) \, d\sigma$$

($\underline{n}$ = Normale von F mit negativer z -Komponente).

2. Aufgabe: Man löse das Anfangswertproblem

$$(3,5) \quad \begin{aligned} u''(x) - 8u'(x) + 16u(x) &= \frac{e^{4x}}{x^2 + 1}, \quad x > 0, \\ u(0) &= 1, \\ u'(0) &= 1. \end{aligned}$$

3. Aufgabe: Gegeben seien die Funktionen

$$(4) \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z} \quad \text{und} \quad g(z) = \cosh \frac{1}{z + 2}$$

in $\mathbb{C} \setminus \{-4, -2, 0\}$ sowie

$$s(z) = f(z) + g(z) \quad \text{und} \quad p(z) = f(z) \cdot g(z).$$

Außerdem sei $R_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z + 2| < 2\}$

und $R_2 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z + 2| < \infty\}$.

1.) Man bestimme die Laurent-Reihen von $s(z)$ in R_1 und R_2 .

2.) Man berechne $\int_{|\zeta|=1}^{\circlearrowleft} (z + 2) p(z) \, dz$.

4. Aufgabe: An einer Autobahn werden Geschwindigkeitsmessungen vorgenommen. Bzgl. der Fahrzeuge werden folgende Farbklassen festgelegt: weiß, rot, blau, sonstige. Man erhält folgendes Ergebnis: 12% aller weißen, 15% aller roten, 12% aller blauen Fahrzeuge und 10% aller Fahrzeuge aus der Farbkategorie „sonstige“ fahren mit zu hoher Geschwindigkeit. Außerdem wird ermittelt: 20% aller (überprüften) Fahrzeuge sind rot und 30% sind aus der Farbkategorie „sonstige“.

- 1.) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse für die überprüften Fahrzeuge?
 - a.) „Fahrzeug ist weiß oder blau“,
 - b.) „Fahrzeug fährt zu schnell“,
 - c.) „zu schnell fahrendes Fahrzeug ist rot“.

 - 2.) Sind die Ereignisse „Fahrzeug fährt zu schnell“ und „Fahrzeug ist rot“ stochastisch unabhängig?
-