Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 1997

Teil B

Höhere Mathematik III + IV,
Numerische Mathematik,
Prof. Dr. J. Bemelmans

Aufgabe 1: Gegeben sei das Vektorfeld

(1,5)

$$\underline{f} \;=\; \underline{f}(x,y,z) \;=\; |x+y+z| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ .$$

a.) Man entscheide, ob das Kurvenintegral

$$I(\mathcal{C}) \;=\; \int\limits_{C} \underline{f}(\underline{x}) \;\cdot\; d\underline{x}$$

im $\mathbb{R}^3$ vom Wege unabhängig ist.

b.) Man berechne $I(\mathcal{C})$ für

$$\mathcal{C} \;:\; x \;=\; e^t \;, \quad y \;=\; \frac{1}{2}\, e^{-t} \;, \quad z \;=\; \frac{1}{2}\, e^{-t} \;, \quad 0 \;\leq\; t \;\leq\; 1 \quad .$$

Aufgabe 2: Gegeben sei das Gebiet

(3)

$$G \;=\; \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 \;+\; y^2 \;<\; 1 \;,\; x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2 \;<\; 2 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\underline{f} \;=\; \underline{f}(x,y,z) \;=\; \left(xz - y^2 \;,\; xy - z^2 \;,\; yz - x^2 \right) \ .$$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes berechne man

$$I \;:=\; \iiint\limits_{G} \operatorname{div}\, \underline{f} \; dx\; dy\; dz \ ,$$

indem man das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umwandelt und dieses berechnet.

Aufgabe 3: Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

(2)

$$\frac{1}{\log x}\, y \;-\; x\, \frac{\cos x}{\log x} \;+\; x y' \;=\; 0 \qquad\qquad (x \;>\; 1) \ .$$

Hinweis: Die Differentialgleichung besitzt einen Multiplikator $\mu = \mu(x)$.

Aufgabe 4: Die Funktionen f, g, h seien 2π–periodisch, und es sei

(2)

$$f(x) = x^2 \; (-\pi < x \le \pi) \; , \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{für } \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \end{cases} \; ,$$

$$h(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \ne 0 \; , \quad -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = 0 \; . \end{cases}$$

Man beantworte folgende Fragen entweder mit **„Ja“** oder mit **„Nein“** (eine Begründung ist nicht erforderlich):

a:) Ist $h(x)$ stückweise stetig auf $\mathbb{R}$?
b:) Ist $h(x)$ stückweise glatt auf $\mathbb{R}$?
c:) Ist $g(x)$ stückweise glatt auf $\mathbb{R}$?
d:) Ist $f(x) \cdot h(x)$ stückweise glatt auf $\mathbb{R}$?
e:) Ist $g(x) \cdot h(x)$ stückweise glatt auf $\mathbb{R}$?
f:) Konvergiert die von $f \cdot g$ erzeugte Fourierreihe in $[0, \pi]$ gleichmäßig ?
g:) Besitzt die von $f \cdot g$ erzeugte Fourierreihe nur Sinus–Glieder ?
h:) Besitzt die von $f \cdot g$ erzeugte Fourierreihe an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ den Wert $\frac{\pi^2}{8}$?

Zur Bewertung von Aufgabe 4:
Für jede richtige Antwort gibt es 0,25 Punkte; jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 0,25 Punkten, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe 5: Man berechne

(1)

$$\oint_{|z-1|=5} \exp\left\{\frac{1}{z - ia}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{(z - ia)^2}\right\} dz$$

für $a \in \mathbb{R}$ mit $-5 < a < 5$.

Aufgabe 6: Dem Zufallsvariablenpaar (X, Y) mit $X \in \{2, -1\}$ und $Y \in \{1, -\frac{1}{2}, -1\}$
(2) werden 6 Wahrscheinlichkeiten nach folgenden Schema zugeordnet:

$X \backslash Y$	$Y = 1$	$Y = -\frac{1}{2}$	$Y = -1$	
$X = 2$	$\frac{6}{37}$	0	$\frac{6}{37}$	$P(X = 2) = \frac{12}{37}$
$X = -1$	$\frac{12}{37}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{12}{37}$	$P(X = -1) = ?$
	$P(Y = 1) = \frac{18}{37}$	$P\left(Y = -\frac{1}{2}\right) = ?$	$P(Y = -1) = ?$	

a) Man berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Produktvariable $X \cdot Y$.
b) Durch Berechnung der Erwartungswerte von X, Y und $X \cdot Y$ zeige man, daß X und Y nicht stochastisch unabhängig sind.
