Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 1999

Teil B

Höhere Mathematik III + IV,
Numerische Mathematik,
Prof. Dr. J. Bemelmans

Aufgabe 1: Man bestimme alle lokalen Extremwerte und alle Sattelpunkte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

(1,5)

$$f(x,y) \; = \; 2x^3 \; - \; y^3 \; - \; 6x^2 \; + \; 6y^2 \; .$$

Aufgabe 2: Man bestimme die Lösungsgesamtheit der Eulerschen Differentialgleichung

(2,0)

$$x^2 u''(x) \; - \; 4x \; u'(x) \; + \; 6u(x) \; = \; 1998 \quad (x > 0) \; .$$

Hinweis: Die homogene Differentialgleichung besitzt eine Lösung der Gestalt $u(x) = x^\lambda \quad (\lambda > 0 \;\text{ fest})$.

Aufgabe 3: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(1,5)

$$\int\limits_0^\infty \frac{\log\,(1 + \sinh x)}{x\,(1 + x^2)} \; dx \; .$$

Hinweis: Man beachte $\sinh x \; = \; \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \; > \; 0 \quad$ für $\; x > 0$

und $\cosh x \; = \; \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \; > \; 1 \quad$ für $\; x > 0$.

Aufgabe 4: Man berechne das Kurvenintegral

(2,5)

$$I(\Gamma) \; := \; \int\limits_\Gamma (-xy - y) \; dx \; + \; (2xy - y) \; dy \; ,$$

wobei Γ die Kurve ist, welche $(0,0)$ mit $(2,1)$ verbindet, und zwar

(i) längs der Geraden $\quad x \; = \; 2y$,

(ii) längs der Parabel $\quad x^2 \; = \; 4y$.

Ist $I(\Gamma)$ im $\mathbb{R}^2$ vom Wege unabhängig (Begründung) ?

---

b i t t e w e n d e n !

Aufgabe 5: Man zeige, daß

(2,0)

$$f(z) \;=\; \frac{z}{\cosh z \;-\; 1} \qquad (z \neq 2k\pi i\ ,\ k \text{ ganz})$$

in $z = 0$ einen Pol 1. Ordnung besitzt, und berechne $\displaystyle\oint_{|z|=1} f(z)\, dz$.

Aufgabe 6: Sei $h \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

(2,0)

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{h}{2}\,(x+1) & , \quad -1 \;\leq\; x \;<\; 1 \\ h & , \quad 1 \;\leq\; x \;<\; 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

(a) Bestimmen Sie $h \in \mathbb{R}$ so, daß f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Streuung einer Zufallsvariablen X mit der im Teil a) bestimmten Dichte f .
