

Teil B

Höhere Mathematik III + IV,  
Numerische Mathematik,  
Prof. Dr. J. Bemelmans

---

**Aufgabe 1:** Es sei  $G$  das Gebiet, das von den Kurven

$$(10) \quad y^2 = x, \quad y = x^2, \quad x \cdot y = e^2, \quad x \cdot y = e^4$$

begrenzt wird.

- (a) Man skizziere  $G$  und beschreibe  $G$  durch geeignete Ungleichungen.  
(b) Durch die Koordinatentransformation

$$T: G \rightarrow G^* \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = T(x, y) = \begin{pmatrix} \log(xy) \\ \log y \end{pmatrix}$$

wird  $G$  eindeutig auf ein Gebiet  $G^*$  abgebildet.

Man gebe die Abbildung  $T^{-1}$  an und beschreibe  $G^*$  durch geeignete Ungleichungen.

- (c) Man berechne  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(x^*, y^*)}$  und den Flächeninhalt von  $G$ .
- 

**Aufgabe 2:** Gegeben seien das Vektorfeld

$$(7) \quad \underline{f}(x, y, z) := (x^5 + y^3, x^3 - 5x z^2 + e^{y^2}, x^3 + y^3 + z^3) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

und die Raumkurve  $K := K_1 + K_2 + K_3$  mit

$$K_1: \gamma_1(t) = (0, -t, -1), \quad -2 \leq t \leq 0;$$

$$K_2: \gamma_2(t) = (t, 0, -1), \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$K_3: \gamma_3(t) = (-t + 2, 2t - 2, -1), \quad 1 \leq t \leq 2.$$

Mit Hilfe des Stokesschen Satzes berechne man  $\int_K \underline{f} \, d\underline{x}$ .

---

**Aufgabe 3:** Gegeben sei die Funktion  $f$  mit

$$(12) \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- (a) Man gebe die Definition für „stückweise glatt in  $[a, b]$ “ an und prüfe, ob  $f(x)$  in  $[-\pi, \pi]$  stückweise glatt ist.  
(b) Man bestimme die von  $f$  erzeugte Fourierreihe  $T_f(x)$ .  
(c) Konvergiert die Fourierreihe  $T_f(x)$  in  $[-1, 1]$  gleichmäßig? (Begründung!)  
(d) Welchen Wert hat die Fourierreihe an der Stelle  $x = 0$ ?
-

---

**Aufgabe 4:** In der Stadt  $A$  regnet es durchschnittlich an 3 von 5 Tagen. Wenn Regen vorhergesagt wurde, dann wird es sogar mit 80% Wahrscheinlichkeit regnen. Bleibt es trocken, so wurde in drei Viertel der Fälle auch Trockenheit angekündigt.

(9)

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Wettervorhersage für einen beliebigen Tag falsch ist?
- (b) Wenn die Vorhersage falsch ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit wird es dann regnen?

---

**Aufgabe 5:** Man gebe eine gebrochen lineare Abbildung

(5)

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

an, welche das Gebiet  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| < |z + 2i|\}$  auf das Äußere des Kreises  $\{w \in \mathbb{C} : |w| > 2\}$  abbildet.

---

**Aufgabe 6:** Mit Hilfe des Residuensatzes berechne man:

(9)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{5} + \cos \varphi)^2} .$$

---