

Teil B

Höhere Mathematik III + IV,
Numerische Mathematik,

Aufgabe 1: Man bestimme das Volumen des Körpers K , der von der Fläche

(9)
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(x^2 + y^2)$$

berandet wird.

Hinweis: Kugelkoordinaten .

Aufgabe 2: Seien das Vektorfeld

(9)
$$\underline{f}(x, y, z) = (e^x z^2 - y^3, x^2 z + e^z, y^2 z + e^x)$$

und die Raumkurve

$$\Gamma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 2\}$$

gegeben. Mittels des Stokesschen Satzes berechne man das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} \underline{f} \cdot d\underline{x},$$

wobei Γ so orientiert ist, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Durchlaufsinn von Γ eine Rechtsschraube bildet.

Aufgabe 3: Lösen Sie das Anfangswertproblem

(5)
$$u + (x + 2u + 1) \cdot u' = 0, \quad x > 1, \\ u(1) = -2.$$

Aufgabe 4: Man bestimme alle gebrochenen linearen Abbildungen

(10)

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \left(ad - bc \neq 0, z \neq -\frac{d}{c} \right),$$

welche die Fixpunkte 0 und 1 haben und zusätzlich

$$f(\infty) = \frac{1+i}{2}$$

erfüllen.

Man ermittle das Bild von $G = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \right\}$ unter der Abbildung f .

Aufgabe 5: Berechnen Sie für die Funktion

(10)

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2} \left\{ \exp\left(\frac{2}{z-1}\right) - 1 \right\}, \quad z^2 - 3z + 2 \neq 0,$$

das Residuum $a := \text{Res}(f, 1)$ in $z = 1$.

Ferner gebe man für a eine geschlossene Darstellung an.

Aufgabe 6: Mit Hilfe des Residuensatzes berechne man

(9)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{2} - \cos t}.$$

Hinweis: $\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$.
