Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 1996

Teil B

Höhere Mathematik III + IV,
Numerische Mathematik,
Prof. Dr. J. Bemelmans

Aufgabe 1: (2,5) Es sei $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = \cos u \cdot \cosh v \ , \ y = \sin u \cdot \cosh v \ , \ z = v \ ; \ 0 \le u \le 2\pi \ , \ -1 \le v \le 1\}$.
Man berechne die Oberfläche von F.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

(3)

$$\begin{cases} u'' - 2u' + 2u = 4e^x \sin x & \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \ , \\ u(0) = 0 \ , \quad u'(0) = 1 \ . \end{cases}$$

Aufgabe 3: Man untersuche das Integral

(2)

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{\log x} \, dx$$

auf Konvergenz oder Divergenz.

Hinweis: partielle Integration

Aufgabe 4: Gegeben seien folgende Teilmengen der komplexen Ebene

(2)

$$K_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \ , \quad K_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i\sqrt{2}| = 1\} \ ,$$

$$G_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\} \ , \quad G_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\left(z\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 0\} \ ,$$

sowie die zwei Möbiustransformationen

$$f(z) := \frac{z + e^{i\frac{\pi}{4}}}{z - e^{i\frac{\pi}{4}}} \qquad \text{und} \qquad g(z) := e^{i\frac{\pi}{4}} \, \frac{z + 1}{z - 1} \ .$$

Man beantworte nachstehende Fragen nur mit **Ja** oder **Nein** (eine Begründung der jeweiligen Antwort ist nicht erforderlich) :

1) Ist das Bild des Einheitskreises K_1 bei der Abbildung f gleich der Geraden G_2, also $f(K_1) = G_2$?
2) Ist $f(K_2) = G_1$?
3) Ist g die Umkehrabbildung von f, also $g = f^{-1}$?
4) Ist jeder Fixpunkt von f auch Fixpunkt von f^{-1} ?

Zur Bewertung von Aufgabe 4:
Für jede richtige Antwort gibt es 0,5 Punkte; jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 0,5 Punkten, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe 5: Man zerlege den folgenden Ausdruck in reelle Partialbrüche:

(2)

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2 \, (x^2 + 2x + 2)}$$
