Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 1997

Teil B

Höhere Mathematik III + IV,
Numerische Mathematik,
Prof. Dr. J. Bemelmans

---

1. Aufgabe: Gegeben seien die Kugel

(2,5)

$$K \;:=\; \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 \,+\, y^2 \,+\, z^2 \;=\; 1\right\}$$

und die Ebene

$$E \;:=\; \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \;=\; x \,+\, y\right\} \quad .$$

Sei C die Schnittkurve von K und E, also $C := K \cap E$, so orientiert, daß sie vom Punkte $(0,0,1)$ aus gesehen positiv orientiert erscheint.

Berechnen Sie das Kurvenintegral $I \;=\; \int\limits_C \underline{f} \cdot d\underline{x}$ mit dem Vektorfeld

$$\underline{f}(x,y,z) \;:=\; \left(-y^2 + z^2 \;,\; x^2 - z^2 \;,\; x^2 - y^2 - y\right) \quad ,$$

indem Sie I mittels des Stokesschen Integralsatzes in ein Flächenintegral überführen, und dieses auswerten.

---

2. Aufgabe: Es sei f die auf $\mathbb{R}$ 2π–period. Funktion, welche für $|x| \leq \pi$ durch $f(x) = |\sin x|$ definiert ist. Man entwickle f in eine Fourierreihe und zeige

(2,5)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j^2 - 1} \;=\; \frac{1}{2} \quad .$$

---

3. Aufgabe: Sei $(\Omega, \mathcal{E}, p)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, C \in \mathcal{E}$ Ereignisse mit $p(A \mid C) = 0,5$; $p(A \mid \overline{C}) = 0,0$; $p(B \mid \overline{C}) = 0,6$; $p(\overline{B} \mid C) = 0,4$; $p(C) = 0,3$.

(1,5)

a) Man berechne $p(A)$ und $p(B)$.

b) Man überprüfe, ob A und C bzw. B und C stochastisch unabhängige Ereignisse sind.

---

4. Aufgabe:

(2) **a.)** Man bestimme diejenige linear gebrochene Abbildung

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad \text{die die Punkte } z_1 = 1 \; , \; z_2 = i \; , \; z_3 = -1$$

der Reihe nach in die Punkte $w_1 = 2 + i$, $w_2 = 1$, $w_3 = i$ überführt.

b.) Auf welches Gebiet wird die obere Halbebene $\{z : z \in \mathbb{C} \; , \; \operatorname{Im} z > 0\}$ durch die im Teil a.) ermittelte Abbildung

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{abgebildet ?} \quad \text{(Begründung !)}$$

---

5. Aufgabe: Man beweise:

(3)
$$a := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \sinh\,(z + 1/z)\; dz$$

ist eine reelle Zahl mit $1 < a < e - 1$.

Hinweis: — Residuensatz — $\sinh\zeta = \frac{1}{2}\left(e^{\zeta} - e^{-\zeta}\right)$
