Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 1998

<u>Teil B</u>

Höhere Mathematik III + IV,
Numerische Mathematik,
Prof. Dr. J. Bemelmans

---

1. Aufgabe: Gegeben sei das räumliche Gebiet

(1,5)

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < \tan y < z < \tan x < 1\ ;\ x,y \in (0, \tfrac{\pi}{4})\right\} .$$

Man berechne
$$\iiint\limits_G \frac{dx\ dy\ dz}{1 + z^2} .$$

---

2. Aufgabe: Gegeben sei das Vektorfeld

(3,5)

$$\underline{a}(x,y,z) = (z^2 - x^2 - y^2 - 2)\ (x,y,z) \qquad \left((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right)$$

und der Körper $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z > \sqrt{2 + x^2 + y^2}\ ,\ 2 < z < 3\right\}$.

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes berechne man
$$\iiint\limits_K \operatorname{div} \underline{a}\ dx\ dy\ dz ,$$
indem man das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral verwandelt und dieses berechnet.

---

3. Aufgabe:

(3)

(a) Man bestimme eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derart, daß f die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1) $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \quad (z \in \mathbb{C}) \qquad$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$.

2) f bildet die Menge $\left\{z \ \middle|\ |z| < 1\right\}$ auf die Menge $\left\{w \ \middle|\ |w-1| < 1\right\}$ ab.

3) f bildet die Menge $\{-1, 0, 1\}$ auf die Menge $\left\{0, 2, \frac{1}{2}\right\}$ ab.

(b) Wie viele Abbildungen mit den Eigenschaften *1)* , *2)* und *3)* gibt es ? Begründung !

(c) Statt *3)* betrachte nun

3′) f bildet die Menge $\{-1, 0, 1\}$ auf $\left\{0, 2, -\frac{1}{2}\right\}$ ab.

Wie viele Abbildungen mit den Eigenschaften *1)* , *2)* und *3′)* gibt es ? Begründen Sie Ihre Antwort.

---

4. Aufgabe: Mit Hilfe des Residuensatzes berechne man für $a \in \mathbb{R}^+$

(3,5)

$$I(a) \ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{(a^2+x^2)^2}\ dx \ .$$

Hinweis: Insbesondere ist die Existenz von $I(a)$ und das Verschwinden gewisser Randintegrale beim Grenzübergang nachzuweisen.
