Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 2000

Teil B

Höhere Mathematik III + IV,
Numerische Mathematik,
Prof. Dr. J. Bemelmans

Aufgabe 1: Betrachtet wird das Kurvenintegral

(8)

$$I(\Gamma) = \int_\Gamma \frac{\alpha x + \beta y}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{\alpha y - \beta x}{(x^2+y^2)^2}\,dy$$

im Gebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 0\}$ mit zwei reellen Konstanten α, β.

(a) Man berechne $I(\Gamma)$ für $\Gamma = \Gamma_0 : x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

(b) Für welche Wahl von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $I(\Gamma)$ in G vom Wege unabhängig ?

(c) Es seien nun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß $I(\Gamma)$ in G vom Wege unabhängig ist. Dann berechne man $I(\Gamma)$, wenn $\Gamma = \Gamma_1$ die logarithmische Spirale

$$\Gamma_1 : r = e^{5\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 4\pi ,$$

ist (r, φ–Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) .

Aufgabe 2: Gegeben seien

(14)

$$G = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x^2 + y^2 + 2z < 9 ,\ z > 4\right\}$$

und das Vektorfeld $\underline{f} : G \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\underline{f}(x,y,z) = e^{9-2z}\left(2x + y\ \sin^2(z^2) ,\ 2y - x + x\ \cos^2(z^2) ,\ 4z\right) .$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes

$$\iiint_G \operatorname{div} \underline{f}\ dx\ dy\ dz ,$$

indem Sie das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umwandeln und dieses berechnen.

Aufgabe 3: **(a)** Zeigen Sie, daß die Reihe

(7)

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

auf $\mathbb{R}$ konvergiert, und berechnen Sie die Grenzfunktion (in geschlossener Form) .

(b) Zeigen Sie, daß die Reihe $(*)$ auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

---

b i t t e w e n d e n !!

Aufgabe 4: Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

(12)

$$f(z) \;=\; \frac{(1+i)\;z - 2i}{z \;-\; i} \quad .$$

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob Sie **wahr** oder **falsch** ist; eine Begründung ist nicht erforderlich.

(a) Die inverse Funktion f^{-1} zu f existiert und ist konform im gesamten Definitionsbereich von f^{-1}.

(b) f besitzt genau einen Fixpunkt.

(c) Die Gerade $\{z \;|\; \operatorname{Im} z = 1\}$ wird durch f auf eine Gerade abgebildet.

(d) $f\Big(\big\{z \;\big|\; \operatorname{Re} z > 1\big\}\Big) \;=\; \Big\{z \;\Big|\; \big|z \;-\; \tfrac{1}{2}\,(1+i)\,\big| \;<\; \tfrac{1}{2}\Big\}\;.$

(e) $g(z) = f\big(f(z)\big)$ ist eine gebrochen–lineare Abbildung mit $D(g) = \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

(f) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1} f(z)\;dz \;=\; 2\pi(1-i).$

Zur Bewertung von Aufgabe 4:

Für jede richtige Antwort gibt es 2 Punkte; jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 2 Punkten, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe 5: Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

(11)

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{7 \;+\; 4\;\sin\varphi}{\sqrt{5} \;+\; 2\;\cos\varphi}\;d\varphi \quad .$$
