**Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen**
**Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans**
**Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 2001**

**Teil B**

**Höhere Mathematik III + IV,**
**Numerische Mathematik,**
**Prof. Dr. J. Bemelmans**

---

**Aufgabe 1:** *(7)* Es sei $G = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \ , \ \ x < 0 \ , \ y > 0 \ , \ z < 0\Big\}$ .

Man berechne

$$\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\ e^{x^2+y^2+z^2}\ dx\ dy\ dz \quad .$$

---

**Aufgabe 2:** *(7)* Gegeben sei die Fläche

$$\mathcal{F} = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = (1-z)^2, \quad -1 \leq z \leq 1\Big\}$$

und das Vektorfeld

$$\underline{a}(x,y,z) = \big(x - yz, 2x + yz, -3xy^2\big) \ , \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad .$$

Es sei $\underline{n} = \underline{n}(x,y,z)$ der Normalenvektor auf $\mathcal{F}$ mit negativer $z$–Komponente.

Mit Hilfe des Stokesschen Satzes berechne man

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \text{rot } \underline{a} \cdot \underline{n}\ do \quad .$$

---

**Aufgabe 3:** *(9)* Gegeben sei die Funktionenfolge $\Big\{f_n(x)\Big\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$f_n(x) := \frac{2n^2x}{(n^2+x^2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \ , \ n \in \mathbb{N}) \ .$$

**(a)** Man berechne $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in \mathbb{R})$ .

**(b)** Man beweise, daß $\{f_n\}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ mit folgender Eigenschaft angibt:

$$x \in \mathbb{R} \ \wedge \ n > N(\varepsilon) \implies \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon \ .$$

**(c)** Man beweise: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty f_n(x)\ dx \neq \int\limits_0^\infty f(x)\ dx$ .

---

**b i t t e   w e n d e n !!!**

**Aufgabe 4:** Es sei $\alpha \in (0,1)$ fest.

*(10)* **(a)** Man beweise, daß durch

$$f(x;\alpha) = \begin{cases} \alpha\, e^{-x} + \dfrac{3(1-\alpha)}{(1+x)^4} & \text{für } x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen $X$ gegeben ist.

**(b)** Man bestimme die zugehörige Verteilungsfunktion $F$.

**(c)** Man bestimme $E(X)$ (in Abhängigkeit von $\alpha$) .

---

**Aufgabe 5:** Gegeben seien die Funktionen

*(10)*

$$f(z) = \frac{z+i}{iz-1} \quad (iz \neq 1)\ ; \qquad g(z) = \frac{z}{z-2} \quad (z \neq 2)\ ;$$

$$h(z) = e^{i\pi/2} \cdot \frac{2z+i}{iz+2} \quad (iz \neq -2)\ ; \quad \ell(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2z}} & \text{für } \cos\dfrac{\pi}{2z} \neq 0 \\ 0 & \text{für } \cos\dfrac{\pi}{2z} = 0 \end{cases} .$$

Man beantworte folgende Fragen entweder mit **„Ja“** oder mit **„Nein“** (eine Begründung ist nicht erforderlich):

**(a)** Besitzt $f$ in $z = -i$ eine hebbare Singularität ?

**(b)** Gilt $\left|f(z)\right| < 100$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ ?

**(c)** Bildet $g$ die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \ \text{Im } z > 0\}$ auf die obere Halbebene $\{w \in \mathbb{C} : \ \text{Im } w > 0\}$ ab ?

**(d)** Besitzt $g\big(g(z)\big)$ mehr als zwei Fixpunkte ?

**(e)** Bildet $g$ die Kurve $K : \ z = \frac{1}{2}\left(e^{i\pi t} + e^{-i\pi t}\right)$ , $0 \le t \le 1$, auf eine Strecke ab ?

**(f)** Gilt $\left|g(z)\right| \le 1$ für $|z| < 1$ ?

**(g)** Bildet $h$ die Menge $M := \big\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\big\}$ auf $M^* := \big\{w \in \mathbb{C} : \ |w| > 1\big\}$ ab?

**(h)** Besitzt $\cos\big\{h(z)\big\}$ in $z = 2i$ einen Pol der Ordnung 1 ?

**(i)** Gilt $\text{Res}\,\big\{\sin h(z)\big\}\Big|_{z=2i} = 2i$ ?

**(j)** Besitzt $\ell$ in $z = 0$ eine isolierte Singularität ?

**Zur Bewertung von Aufgabe 5:**

Für jede richtige Antwort gibt es 1 Punkt, jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 1 Punkt, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

---

**Aufgabe 6:** Es sei $f : \ \mathbb{C} \setminus \{0,-2\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) := \dfrac{1}{z(z+2)^3}$ .

*(9)* Geben Sie für alle möglichen Laurentreihenentwicklungen von $f$ um den Punkt $z_0 = -2$ die Koeffizienten der Laurentreihen explizit an.

---