Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 2003

Teil B

Höhere Mathematik III + IV,
Numerische Mathematik,
Prof. Dr. J. Bemelmans

Aufgabe 1: Gegeben sei das Gebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 > 0\}$ und das Vektorfeld

$$\underline{f}(x,y) \ = \ \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\,(y,-x)\ , \qquad (x,y) \in G\ .$$

(4) **(a)** Man zeige, daß das Kurvenintegral

$$I(\Gamma) \ = \ \int\limits_{\Gamma} \underline{f}\ d\underline{x}$$

in G vom Wege unabhängig ist.

(3) **(b)** Man berechne $I(\Gamma)$ für $\Gamma\colon\ \gamma(t) = (-\cos\pi t + 1\ ,\ t - \sin 2\pi t)\ ,\ 1 \ \leq \ t \ \leq \ 2\ .$

Aufgabe 2: Gegeben sei der Körper $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 \ + \ y^2 \ + \ z^2 \ < \ 4,\ -1 \ < \ z \ < \ 1\}$, das Vektorfeld

(11)

$$\underline{a} \ = \ \underline{a}(x,y,z) \ = \ \big(\sin z\ ,\ y^2 z \ - \ \cos x\ ,\ xz^2 \ + \ \arctan\,(x\cdot y)\big)\ , \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ,$$

und die skalare Funktion

$$u(x,y,z) \ = \ x^2 \ + \ y^2 \ + \ z^3\ , \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ .$$

Es sei ∂K die Berandung von K und $\underline{n}$ die äußere Einheitsnormale auf ∂K.
Man berechne

$$I \ = \ \iint\limits_{\partial K} \big(\underline{a} \ + \ \operatorname{rot}\,\underline{a} \ + \ \operatorname{grad}\,u\big) \ \cdot \ \underline{n}\ do\ ,$$

indem man I mit dem Gaußschen Satz in ein Volumenintegral verwandelt und dieses berechnet.

Aufgabe 3: Es sei $f_n\colon\ [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) \ := \ xe^{-nx}$.

(6) **(a)** Man zeige, daß die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ auf $[0,\infty)$ gleichmäßig konvergiert, indem man zunächst $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =\colon f(x)$ bestimmt und dann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ so angibt, daß gilt:

$$x \in [0,\infty) \ \wedge \ n \ > \ N(\varepsilon) \ \Longrightarrow \ \big|f(x) \ - \ f_n(x)\big| \ < \ \varepsilon\ .$$

(4) **(b)** Man zeige, daß die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ auf $[0,\infty)$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 4: Wir untersuchen folgendes Urnenexperiment: in einer Urne befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln; es wird eine Kugel gezogen, sodann sie selbst und eine

(6) weitere Kugel der gleichen Farbe in die Urne gelegt (Polya–Urnenmodell für die Ausbreitung einer Krankheit = rote Kugel).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man

(a) bei den ersten beiden Zügen jeweils eine rote Kugel zieht ,

(b) bei den ersten drei Zügen insgesamt genau eine rote Kugel zieht ,

(c) bei den ersten drei Zügen mindestens zwei weiße Kugeln zieht ?

Aufgabe 5:

(3) **(a)** Man bestimme alle gebrochen–linearen Abbildungen

$$w \;=\; f(z) \;=\; \frac{az \;+\; b}{cz \;+\; 1} \quad \text{mit den Fixpunkten 0 und 1 .}$$

(4) **(b)** Man bestimme nun alle f so, daß außerdem die Geraden

$\big\{w \in \mathbb{C}\colon\ w = 1 + it\ ,\ -\infty < t < \infty\big\}$ und $\big\{w \in \mathbb{C}\colon\ w = i + t\ ,\ -\infty < t < \infty\big\}$

Bilder von zwei Geraden der z–Ebene sind.

Hinweis: Es gibt genau zwei Abbildungen mit dieser Eigenschaft. Um sie anzugeben mag es hilfreich sein, die inverse Abbildung $z = f^{-1}(w)$ zu bestimmen.

Aufgabe 6: Gegeben sei die Funktion $f\colon\ \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) \;=\; \sinh\,\frac{i}{z}\ .$$

(2) **(a)** Man bestimme alle Nullstellen von $f\colon\ M = \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ f(z) = 0\big\}$.

Sei nun $g(z) \;=\; \dfrac{1}{f(z)}\ ,\ z \in \mathbb{C} \setminus \big(\{0\}\ \cup\ M\big)$.

(3) **(b)** Man zeige: g hat in $z_1 = \dfrac{1}{\pi}$ einen Pol der Ordnung 1; man berechne Res (g, z_1) .

(6) **(c)** Man berechne $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \big(g(z) + f(z)\big)\ dz$.
