Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Bemelmans, Prof. Dr. S. Maier-Paape

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Sommer 2005
(180 Minuten)
Höhere Mathematik III + IV, Numerische Mathematik

F1:

Aufgabe 1: (11 Punkte) Berechnen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz den Flächeninhalt der Menge

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x|^{2/3} + |y|^{2/3} \le R^{2/3}\} \quad , \quad R > 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass

$$\gamma(\varphi) := \left(R\,(\cos(\varphi))^3 \,,\; R\,(\sin(\varphi))^3\right) \;,\; \varphi \in [0, 2\pi]$$

eine Parametrisierung der Randkurve von D ist.

F2:

Aufgabe 2: (11 Punkte) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{u(x)^3} + \dfrac{u(x)^2 - 3x^2}{u(x)^4}\, u'(x) = 0 & \text{für } x > 1 \\ u(1) = 1 & \end{cases}$$

F3:

Aufgabe 3: (11 Punkte) In der y,z–Ebene sei eine glatte, doppelpunktfreie, geschlossene Kurve gegeben durch

$$\Gamma(t) := (0, u(t), v(t)) \;,\quad t \in [a,b] \,,\quad \Gamma(a) = \Gamma(b).$$

Ferner sei $u(t) > 0$, und die Kurve werde im mathematisch positiven Sinn durchlaufen. Wenn man die Kurve um die z–Achse im Raum rotiert, entsteht ein Rotationskörper K mit der parametrisierten Oberfläche

$$\mathcal{F}: \; F(\varphi, t) := (u(t)\cos(\varphi), u(t)\sin(\varphi), v(t)) \;,\quad \varphi \in [0, 2\pi] \,,\quad t \in [a,b] \,.$$

(a) Berechnen Sie die äußere Normale $n := F_\varphi \wedge F_t$ an K.

(b) Zeigen Sie die folgende Formel für das Volumen von K

$$\mathrm{Vol}(K) = \pi \int_a^b (u(t))^2\, v'(t)\, dt \,.$$

Hinweis: Berechnen Sie das Integral über den Rotationskörper K

$$\int_K \operatorname{div} W \, dxdydz \,, \quad \text{mit dem Vektorfeld} \quad W(x,y,z) := (x,y,0) \quad , \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Bitte wenden !!!

F4:

Aufgabe 4: (11 Punkte) Gegeben seien das Vektorfeld

$$V(x,y,z) := (2ye^z\ ,\ -2x+3z\ ,\ ye^z)\quad ,\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

und die Fläche

$$\mathcal{F} := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ z>0\ ,\ x^2+y^2+z=4\ \}.$$

Berechnen Sie mit dem Stokesschen Integralsatz

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} V\cdot n\, do,$$

wobei n die Normale an F mit negativer z–Komponente ist.

F5:

Aufgabe 5: (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $c\in\mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0 \\ \frac{1}{8}e^{-cx} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Dichte einer stetigen Zufallsvariablen X ist.

(b) Berechnen Sie explizit die zugehörige Verteilungsfunktion F, den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)\ \big(=\sigma^2(X)\big)$.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass $E\big(\varphi(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x$, wenn φ eine stetige Funktion ist.

K19:

Aufgabe 6: (10 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx\ .$$

K22:

Aufgabe 7: (7 Punkte) Man bestimme die Koeffizienten der Laurentreihe der Funktion

$$f(z) = \frac{2z}{(z^2+1)^2} + \frac{1}{z(z+1)} \quad \text{um den Punkt } z_0 = 0\ ,\ \text{für } 0<|z|<1.$$

K18:

Aufgabe 8: (9 Punkte)
Es sei $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\arg(f(z))\in[-\frac{\pi}{2}\,,\,\pi]$ für alle $z\in\mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie eine Kreisscheibe $B_r(z_0)$, so dass $f(z)\notin B_r(z_0)$ für alle $z\in\mathbb{C}$.

(b) Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Bemelmans, Prof. Dr. S. Maier-Paape

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Sommer 2005
(120 Minuten)
Höhere Mathematik III + IV

F2:

Aufgabe 1: (11 Punkte) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{u(x)^3} + \dfrac{u(x)^2 - 3x^2}{u(x)^4}\, u'(x) = 0 & \text{für } x > 1 \\ u(1) = 1 & \end{cases}$$

F3:

Aufgabe 2: (11 Punkte) In der y,z–Ebene sei eine glatte, doppelpunktfreie, geschlossene Kurve gegeben durch

$$\Gamma(t) := (0, u(t), v(t)), \quad t \in [a,b], \quad \Gamma(a) = \Gamma(b).$$

Ferner sei $u(t) > 0$, und die Kurve werde im mathematisch positiven Sinn durchlaufen. Wenn man die Kurve um die z–Achse im Raum rotiert, entsteht ein Rotationskörper K mit der parametrisierten Oberfläche

$$\mathcal{F}: \ F(\varphi, t) := (u(t)\cos(\varphi), u(t)\sin(\varphi), v(t)), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad t \in [a,b].$$

(a) Berechnen Sie die äußere Normale $n := F_\varphi \wedge F_t$ an K.

(b) Zeigen Sie die folgende Formel für das Volumen von K

$$\mathrm{Vol}(K) = \pi \int_a^b (u(t))^2\, v'(t)\, dt.$$

Hinweis: Berechnen Sie das Integral über den Rotationskörper K

$$\int_K \operatorname{div} W \, dxdydz, \quad \text{mit dem Vektorfeld} \quad W(x,y,z) := (x, y, 0), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

F4:

Aufgabe 3: (11 Punkte) Gegeben seien das Vektorfeld

$$V(x,y,z) := (2ye^z, \ -2x + 3z, \ ye^z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

und die Fläche

$$\mathcal{F} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0, \ x^2 + y^2 + z = 4\}.$$

Berechnen Sie mit dem Stokesschen Integralsatz

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} V \cdot n \, do,$$

wobei n die Normale an F mit negativer z–Komponente ist.

Bitte wenden !!!

FS:

Aufgabe 4: (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{8}\, e^{-cx} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Dichte einer stetigen Zufallsvariablen X ist.

(b) Berechnen Sie explizit die zugehörige Verteilungsfunktion F, den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)\ \big(= \sigma^2(X)\big)$.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass $E\big(\varphi(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x$, wenn φ eine stetige Funktion ist.

K19:

Aufgabe 5: (10 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2\,(x^2+4)}\, dx\ .$$

K18:

Aufgabe 6: (9 Punkte)
Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\arg(f(z)) \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie eine Kreisscheibe $B_r(z_0)$, so dass $f(z) \notin B_r(z_0)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Zeigen Sie, dass f konstant ist.

K25:

Aufgabe 7: (10 Punkte) Es sei $f(t) = \begin{cases} 3 - |t| & \text{für } |t| \leq 3 \\ 0 & \text{für } |t| > 3 \end{cases}$.

(a) Bestimmen Sie eine Lösung g der Integralgleichung

$$f(t) = \int_0^{\infty} g(\omega)\cos(\omega t)\, d\omega\ , \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

(b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^{\infty} \frac{\big(1-\cos(3x)\big)^2}{x^4}\, dx\ .$$

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Bemelmans, Prof. Dr. S. Maier-Paape

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Sommer 2005
(90 Minuten)
Höhere Mathematik III

F1: **Aufgabe 1: (11 Punkte)** Berechnen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz den Flächeninhalt der Menge

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x|^{2/3} + |y|^{2/3} \leq R^{2/3}\right\} \quad , \quad R > 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass

$$\gamma(\varphi) := \left(R\,(\cos(\varphi))^3,\ R\,(\sin(\varphi))^3\right) \ ,\ \varphi \in [0, 2\pi]$$

eine Parametrisierung der Randkurve von D ist.

F2: **Aufgabe 2: (11 Punkte)** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{u(x)^3} + \dfrac{u(x)^2 - 3x^2}{u(x)^4}\, u'(x) = 0 \quad \text{für } x > 1 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

F3: **Aufgabe 3: (11 Punkte)** In der y, z–Ebene sei eine glatte, doppelpunktfreie, geschlossene Kurve gegeben durch

$$\Gamma(t) := (0, u(t), v(t)) \ , \quad t \in [a,b], \quad \Gamma(a) = \Gamma(b).$$

Ferner sei $u(t) > 0$, und die Kurve werde im mathematisch positiven Sinn durchlaufen. Wenn man die Kurve um die z–Achse im Raum rotiert, entsteht ein Rotationskörper K mit der parametrisierten Oberfläche

$$\mathcal{F}: \ F(\varphi, t) := (u(t)\cos(\varphi), u(t)\sin(\varphi), v(t)) \ , \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad t \in [a,b] \ .$$

(a) Berechnen Sie die äußere Normale $n := F_\varphi \wedge F_t$ an K.

(b) Zeigen Sie die folgende Formel für das Volumen von K

$$\mathrm{Vol}(K) = \pi \int_a^b (u(t))^2\, v'(t)\, dt \ .$$

Hinweis: Berechnen Sie das Integral über den Rotationskörper K

$$\int_K \operatorname{div} W\, dxdydz \ , \quad \text{mit dem Vektorfeld} \quad W(x,y,z) := (x, y, 0) \quad , \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Bitte wenden !!!

F4:

Aufgabe 4: (11 Punkte) Gegeben seien das Vektorfeld

$$V(x,y,z) := (2ye^z \ , \ -2x+3z \ , \ ye^z) \quad , \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

und die Fläche

$$\mathcal{F} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ z > 0 \ , \ x^2+y^2+z = 4 \ \}.$$

Berechnen Sie mit dem Stokesschen Integralsatz

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} V \cdot n \, do,$$

wobei n die Normale an F mit negativer z–Komponente ist.

F5:

Aufgabe 5: (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{8} e^{-cx} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

Dichte einer stetigen Zufallsvariablen X ist.

(b) Berechnen Sie explizit die zugehörige Verteilungsfunktion F, den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X) \big(= \sigma^2(X)\big)$.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass $E\big(\varphi(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, f(x) \, \mathrm{d}x$, wenn φ eine stetige Funktion ist.

ufgabe F1:

Es gilt mit dem Gaußschen Integralsatz für $V = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\int_D \operatorname{div} V \, dx\, dy = \int_{\partial D} V_1 \, dy - V_2 \, dx$$ 2

Wähle $V(x,y) := (x, y)$

$$\Rightarrow \quad 2 \int_D dx\, dy = \int_{\partial D} x \, dy - y \, dx$$ 2

Also $\quad \operatorname{Vol}(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x \, dy - y \, dx$

mit $\Gamma(\varphi) = (R\cos^3(\varphi), R\sin^3(\varphi)) \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$

und $\Gamma'(\varphi) = (-R\,3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi), R\,3\sin^2(\varphi)\cos(\varphi))$ 2

gilt

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D} x \, dy - y \, dx = \frac{3R^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^4(\varphi)\cos^2(\varphi) + \cos^4(\varphi)\sin^2(\varphi) \, d\varphi$$ 2

$$= \frac{3}{2} R^2 \int_0^{2\pi} \frac{2^2 \cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)}{2^2} \, d\varphi = \frac{3}{2^3} R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(2\varphi) \, d\varphi$$

$$\frac{3}{2^4} R^2 \int_0^{4\pi} \sin^2(x) \, dx = \frac{3}{2^4} R^2 \left. \frac{-\cos(x)\sin(x) + x}{2} \right|_0^{4\pi} = \underline{\underline{\frac{3}{8} R^2 \pi}}$$ 3

Musterlösung

Aufgabe F2: $\underbrace{\frac{2x}{u(x)^3}}_{P(x,u)} + \underbrace{\frac{u(x)^2 - 3x^2}{u(x)^4}}_{Q(x,u)} u'(x) = 0 \qquad (*)$

ist exakte DGL, denn $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-6x}{u(x)^4} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 2

Def.: $f(x,u) = \int \frac{2x}{u^3}\,dx = \frac{x^2}{u^3} + c(u)$

Dann gilt $f_u(x,u) = \frac{-3x^2}{u^4} + c'(u) \overset{(*)}{\equiv} \frac{-3x^2}{u^4} + \frac{1}{u^2}$

$\Rightarrow \quad c'(u) = \frac{1}{u^2} \quad \Rightarrow \quad c(u) = -\frac{1}{u}$

Insgesamt $f(x,u) = \frac{x^2}{u^3} - \frac{1}{u}$ 7

Also $f(x,u) = c \iff \frac{x^2}{u^3} - \frac{1}{u} = c$

mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

Für $u(1) = 1$ folgt

$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} = c$ also $c = 0$

Damit ist die explizite Lösung der exakten DGL

$\underline{\underline{u(x) = x}}$, $x \geq 1$ 2

Diese erfüllt $u(1) = 1$

Musterlösung

Aufgabe F3: a) $n = F_\varphi \times F_t$

$$= \begin{pmatrix} -u(t)\sin(\varphi) \\ u(t)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u'(t)\cos(\varphi) \\ u'(t)\sin(\varphi) \\ v'(t) \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\left(u(t)v'(t)\cos(\varphi),\ u(t)v'(t)\sin(\varphi),\ -u(t)u'(t)\right)}}$$ (3)

b) Mit Hinweis gilt $2\,\mathrm{Vol}(K) = 2\int_K dx\,dy\,dz$

$$= \int_K \operatorname{div} V\,dx\,dy\,dz \overset{\text{Gauß}}{=} \iint_F V\cdot n\,do$$ (4)

$$= \int_0^{2\pi}\int_a^b u(t)\cos(\varphi)\cdot u(t)v'(t)\cos(\varphi) + u(t)\sin(\varphi)\cdot u(t)v'(t)\sin(\varphi)\,dt\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_a^b u^2(t)v'(t)\underbrace{\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)}_{=1}\,d\varphi$$

$$= 2\pi\int_a^b u^2(t)v'(t)\,dt$$

Also $\underline{\underline{\mathrm{Vol}(K) = \pi\int_a^b u^2(t)v'(t)\,dt}}$ (4)

Aufgabe F4: Musterlösung

Stokes

$$\iint_F \operatorname{rot} V \, n \, do = \int_{\partial F} V \cdot dx$$

Eine Parametrisierung der Randkurve von F ist

$$\Gamma(\varphi) := (2\cos(\varphi), 2\sin(\varphi), 0), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$ (2)

dies erhält man für $z=0$ aus der Def von F, $x^2+y^2=4$.

$$\Gamma'(\varphi) = (-2\sin(\varphi), 2\cos(\varphi), 0)$$ (2)

$$\Rightarrow \int_{\partial F} V \cdot dx = \int_0^{2\pi} V(\Gamma(\varphi)) \cdot \Gamma'(\varphi) \, d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} 2 \, 2\sin(\varphi) \cdot e^0 \, 2(-\sin(\varphi)) + (-2 \, 2\cos(\varphi) + 3 \cdot 0) \, 2\cos(\varphi) + 0 \, d\varphi$$

$$-8 \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)}_{=1} \, d\varphi = -8 \cdot 2\pi = -16\pi$$ (5)

Damit Γ mit der Normalen n eine Rechtsschraube bildet muß Γ entgegengesetzt durchlaufen werden was als Ergebnis $\underline{16\pi}$ ergibt. (2)

Aufgabe F5:
a) Damit f Dichte einer stetigen Zufallsvariablen ist, muss gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \iff \frac{1}{8}\int_0^{\infty} e^{-cx}\,dx$$

2

Damit das Integral konvergiert muss $c>0$ sein und es ergibt sich

$$\frac{1}{8}\,\frac{e^{-cx}}{-c}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{8}\,\frac{1}{c} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\iff \underline{\underline{c = \frac{1}{8}}}$$

2

b) $$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \frac{1}{8}\int_0^{t} e^{-\frac{x}{8}}\,dx = -e^{-\frac{x}{8}}\Big|_0^{t}$$

$$= -\left(e^{-\frac{t}{8}} - 1\right) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \underline{\underline{1 - e^{-\frac{t}{8}}}}, & t > 0 \ (*) \end{cases}$$

2

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{8}\int_0^{\infty} x e^{-\frac{x}{8}}\,dx$$

$$\underbrace{-x e^{-\frac{x}{8}}\Big|_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{8}}\,dx \stackrel{(*)}{=} 8\left(1 - \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{8}}\right) = \underline{\underline{8}}$$

2

$$Var(X) = E\left((X-E(X))^2\right) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{8}\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{8}}\,dx$$

$$= \underbrace{-x^2 e^{-\frac{x}{8}}\Big|_0^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\frac{16}{8}\int_0^{\infty} x e^{-\frac{x}{8}}\,dx}_{16 \cdot E(X)} = 16 \cdot 8 = 128$$

$$\Rightarrow \quad Var(X) = 128 - 8^2 = 128 - 64 = \underline{\underline{64}}$$

2

Aufgabe K18:

a) Für $z \in B_1(-87-87i)$ gilt $\mathrm{Im}(z) < 0$, $\mathrm{Re}(z) < 0$ und damit $\arg(z) \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$.

Es folgt $f(z) \notin B_1(-87-87i)$ für $z \in \mathbb{C}$. 4

b) Aus a) folgt $|f(z)+87+87i| > 1$ und ~~es~~ damit $\left|\frac{1}{f(z)+87+87i}\right| < 1$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach dem Satz von Liouville ist die Funktion

$g(z) = \frac{1}{f(z)+87+87i}$ somit konstant. Es folgt, dass auch f konstant ist.

5

Musterlösung

Aufgabe K19

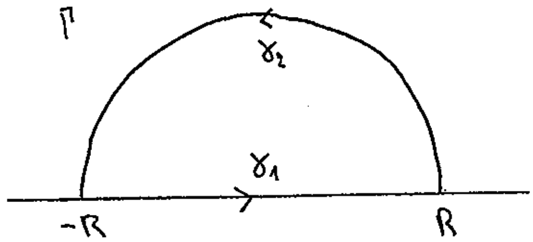
- Setze $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+4)}$, $z \in \mathbb{C}$.

- f hat Singularitäten bei $i, -i, 2i$ und $-2i$.

- Setze $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ mit

  $\Gamma_1: \gamma_1(t) = t$, $t \in [-R, R]$

  $\Gamma_2: \gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$.



- Für R groß liegt i und $2i$ in dem von Γ beschränkten Gebiet.

- Da $f(z)(z-i)^2 \to \frac{1}{12} \neq 0$ für $z \to i$ ist i eine Polstelle 2. Ordnung und damit

  $\operatorname{Res}_{z=i} f = \frac{d}{dz}\left[f(z)(z-i)^2\right]_{|z=i} = -\frac{10}{72} i$.   2

- Da $f(z)(z-2i) \to \frac{1}{9} i$ für $z \to 2i$ ist $2i$ eine Polstelle 1. Ordnung und damit

  $\operatorname{Res}_{z=2i} f = \lim_{z \to 2i} \left[f(z)(z-2i)\right] = \frac{1}{9} i$.   2

- $\left| \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{R^2 e^{i2t}}{(R^2 e^{i2t}+1)^2 (R^2 e^{i2t}+4)} \cdot iRe^{it}\,dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{R^3}{(R^2-1)^2(R^2-4)}\,dt$; für R groß

  $\leq \pi \cdot \frac{1}{\frac{1}{8}R^3} \to 0$ für $R \to \infty$ 4

- Nach dem Residuensatz gilt $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} f + \operatorname{Res}_{z=2i} f \right)$ und damit

  $\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \left(-\frac{10}{72} i + \frac{1}{9} i \right)$. Es folgt $\underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{18}}}$ 2

Aufgabe K22:

- $\frac{2z}{(1+z^2)^2} = \frac{d}{dz}\left[\frac{-1}{(1+z^2)}\right] = -\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k} = -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2k\, z^{2k-1}$ 3

- $\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k$ 1

- $f(z) = \frac{1}{z} - 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} z^k - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2k\, z^{2k-1}$

- $$\begin{cases} c_n = 0 & \text{für } n < -1 \\ c_{-1} = 1 & \\ c_0 = -1 & \\ c_n = (-1)^{n+1} & \text{für } n > 0,\ n \text{ gerade} \\ c_n = (-1)^{n+1} - (-1)^{\frac{n+1}{2}}(n+1) & \text{für } n > 0,\ n \text{ ungerade} \end{cases}$$ 3

Aufgabe K25

a) • f ist gerade und damit $\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos(3\omega)}{\omega^2}$. (3)

• Nach der Fourierschen Integralformel ist

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos(3\omega)}{\omega^2}\, e^{it\omega}\,d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1-\cos(3\omega)}{\omega^2} \cos(t\omega)\,d\omega$$ (3)

• Es folgt, daß $\underline{\underline{g(\omega) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos(3\omega)}{\omega^2}}}$ eine Lösung der Integralgleichung ist. (2)

b) • Es ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2\,dt = 18$.

• Nach der Parseval-Plancherel-Gleichung ist $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)^2\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2\,dt = 18$

und damit $\underline{\underline{\int_0^\infty \frac{(1-\cos(3\omega))^2}{\omega^4}\,d\omega = \frac{9\pi}{2}}}$ (2)

Aufgabe N1
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 25 & -10 & -5 \\ -10 & 28 & -10 \\ -5 & -10 & 13 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Überprüfen Sie, ob die Matrix A positiv definit ist.

b) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$.

c) Lösen Sie mit Teilaufgabe b) das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

d) Berechnen Sie die Determinante von A.

e) Wäre das Problem auch über LR-Zerlegung ohne Pivotisierung lösbar?

f) Welche Variante ist vorzuziehen und warum?

1+2+1+1+1+1 Punkte

Lösung:

b) Berechne Cholesky-Zerlegung von A. Laut Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned} d_{kk} &= a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{k,j}^2 d_{jj}, \\ \ell_{ik} &= \frac{1}{d_{kk}} \left[a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{i,j} d_{jj} \ell_{k,j} \right], \quad k < i \le n \quad \text{und} \quad \ell_{ii} = 1, \quad 1 \le i \le n \end{aligned}$$

Damit ist

$$d_{11} = 25, \quad \ell_{11} = 1, \quad \ell_{21} = \frac{-10}{25} = -\frac{2}{5}, \quad \ell_{31} = \frac{-5}{25} = -\frac{1}{5}$$

$$d_{22} = 28 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 25 = 24, \quad \ell_{22} = 1, \quad \ell_{32} = \frac{1}{24}\left[-10 - \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 25 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)\right] = -\frac{1}{2}$$

$$d_{33} = 13 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \cdot 25 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 24 = 6,$$

also

$$A = LDL^T \quad \text{mit} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) A ist positiv definit, da alle Diagonaleinträge in D größer als Null sind.

c) Löse $Ax = b$ mit Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$

- Löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen:

$$y_1 = 5, \quad y_2 = -8 + \frac{2}{5} \cdot 5 = -6, \quad y_3 = -7 + \frac{1}{5} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-6) = -9$$

- Löse $Dv = y$ durch Skalierung:

$$v_1 = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}, \quad v_2 = \frac{-6}{24} = -\frac{1}{4}, \quad v_3 = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2},$$

- Löse $L^T x = v$ durch Rückwärtseinsetzen:

$$x_3 = \frac{-3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1, \quad x_1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot (-1) + \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2},\right)^T$$

d) Berechne die Determinante der Matrix A:

$$\det(A) = \det(LDL^T) = \underbrace{\det(L)}_{=1} \cdot \det(D) \cdot \underbrace{\det(L^T)}_{=1} = \det(D) = 25 \cdot 24 \cdot 6 = 3600$$

e) A ist symmetrisch und positiv definit $\overset{\text{Vorlesung}}{\Rightarrow}$ $a_{1,1} > 0$ und die transformierte Matrix ist wieder symmetrisch und positiv definit. Durch iteriertes Anwenden der obigen Arguments folgt, dass die LR-Zerlegung von A existiert.

f) Vergleiche Aufwand der beiden Verfahren:

- Aufwand der LR-Zerlegung: $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$
- Aufwand der Cholesky-Zerlegung: $\frac{1}{6}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

$\Rightarrow$ ziehe Cholesky-Verfahren vor.

Aufgabe N2
Mit einem iterativen Verfahren soll die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - \cos(x)$ für $x > 0$ bestimmt werden.

a) Formulieren Sie eine Fixpunktiteration, mit deren Hilfe Sie die Nullstelle von f ermitteln können. Zeigen Sie, dass diese Iteration für jeden Startwert in einem von Ihnen geeignet gewählten Intervall konvergiert.

   Hinweis: Um ein geeignetes Intervall zu finden, kann es nützlich sein, die Funktionen $g(x) = x^2$ und $h(x) = \cos(x)$ zu skizzieren.

b) Wie viele Schritte sind ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ höchstens nötig, damit der Fehler kleiner als 10^{-5} wird?

c) Nennen Sie ein Verfahren, das lokal quadratisch gegen die Nullstelle konvergiert. Formulieren Sie auch die zugehörige Iterationsvorschrift.

3+2+2 Punkte

Lösung:

a) Betrachte Iterationsfunktion $\Phi(x) = \sqrt{\cos(x)}$ im Intervall $I = [0, 1]$.

   Zeige: Φ erfüllt im Intervall I die Voraussetzungen des Banach-Fixpunktsatzes. dazu: Prüfe Voraussetzungen des Banach-Fixpunktsatzes:

   - $I = [0, 1]$ ist abgeschlossen.
   - Es ist $\Phi(0) = 1 \in I$, $\Phi(1) \approx 0.735 \in I$ und es gilt

     $$\Phi'(x) = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}} \leq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in I.$$

     $\Rightarrow \Phi : I \to I$, also Φ ist Selbstabbildung auf I.
   - Auf $I = [0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ ist $\cos(x)$ monoton fallend und $\sin(x)$ monoton steigend. Daher gilt

     $$|\Phi'(x)| = |\frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}| = \frac{\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}} \leq \frac{\sin(1)}{2\sqrt{\cos(1)}} \approx 0.572 < 1.$$

     $\Rightarrow \Phi : I \to I$ ist Kontraktion auf I.

Nach dem Banach-Fixpunktsatz gilt: Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert für jedes $x_0 \in I = [0,1]$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* \in I$ von Φ, der zugleich die eindeutige Nullstelle von f ist.

b) Sei $x^* \in I$ der Fixpunkt von Φ bzw. die Nullstelle von f. Benutze nun die a-priori-Abschätzung

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Aus dem Startwert $x_0 = 0$ folgt $x_1 = \Phi(x_0) = 1$ und damit $|x_1 - x_0| = 1$. Die Toleranz beträgt $\varepsilon = 10^{-5}$, die Lipschitzkonstante aus Teil a) ist $L = 0.573$ (sicherheitshalber aufgerundet). Nun gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon \overset{!}{<} \frac{L^n}{1-L} \quad &\Leftrightarrow \quad L^n > \varepsilon(1-L) \\ &\Leftrightarrow \quad n > \frac{\log(\varepsilon(1-L))}{\log(L)} \approx 22.20, \end{aligned}$$

man benötigt also höchstens 23 Iterationen, damit der Fehler sicher kleiner als $\varepsilon = 10^{-5}$ ist.

c) Das Newton-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - \cos(x_k)}{2x_k + \sin(x_k)}$$

ist lokal quadratisch konvergent.

Aufgabe N3

Die Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ sollen so gewählt werden, dass die Messwerte

i	1	2	3
x_i	1	2	3
f_i	20	-14	2

im Sinne kleinster Fehlerquadrate durch die theoretisch begründete Modellfunktion

$$f(x) = \alpha(-10x^2 + 48x - 48) + \beta(-10x^2 + 45x - 30)$$

optimal approximiert werden.

a) Formulieren Sie das zugehörige Ausgleichsproblem.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem mit Hilfe von Givens-Rotationen. Wie groß ist das Residuum?

c) Welches andere Verfahren zur Lösung linearer Ausgleichsprobleme kennen Sie?

d) Welchen wesentlichen Nachteil besitzt das andere Verfahren?

2+4+1+1 Punkte

Lösung:

a) Das lineare Ausgleichsproblem lautet: Finde $x = (\alpha, \beta)^T \in \mathbb{R}^2$ so, dass $||Ax - b||_2$ minimal ist. Setze

$$f_1(x) := -10x^2 + 48x - 48 \quad \text{und} \quad f_2(x) := -10x^2 + 45x - 30,$$

dann ist

$$A = \begin{pmatrix} f_1(1) & f_2(1) \\ f_1(2) & f_2(2) \\ f_1(3) & f_2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 8 & 20 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Löse das lineare Ausgleichsproblem mit Givens-Rotationen:

Eliminiere $A_{31} = 6$: $r = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \Rightarrow c_1 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, $s_1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$,

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad A^{(1)} = G_1 A = \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 10 & 25 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = G_1 b = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Eliminiere $A_{21}^{(1)} = 10$: $r = \sqrt{(-10)^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad c_2 = \frac{-10}{10\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_2 = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{(2)} = G_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 10\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \\ 0 & -15\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = G_2 b^{(1)} = \begin{pmatrix} -15\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Löse das lineare Ausgleichsproblem durch Rückwärtseinsetzen:

$$\beta = x_2 = \frac{-5\sqrt{2}}{-15\sqrt{2}} = \frac{1}{3}, \quad \alpha = x_1 = \frac{1}{10\sqrt{2}} \left(-15\sqrt{2} - \frac{1}{3} 10\sqrt{2} \right) = -\frac{11}{6}.$$

und damit lautet die Lösung

$$\Rightarrow \quad x = \left(-\frac{11}{6}, \frac{1}{3} \right)^T.$$

Das Residuum lässt sich aus $b^{(2)}$ ablesen und beträgt $||Ax - b||_2 = 10$.

c) Ein zweites Verfahren zur Lösung linearer Ausgleichsprobleme ist die direkte Lösung der Normalgleichungen.

d) Vergleiche die Konditionen der beiden Probleme:

- Kondition des linearen Ausgleichsproblems: $\frac{\kappa_2(A)}{\cos(\Theta)}$
- Kondition der Normalgleichungen: $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$

Falls $\cos(\Theta) \approx 1$ und $\kappa_2(A) \gg 1$ ist, gilt

$$\kappa_2(A)^2 \gg \frac{\kappa_2(A)}{\cos(\Theta)}.$$

Folglich ist dann die Kondition der Matrix $A^T A$ in den Normalgleichungen sehr viel größer als die Kondition des linearen Ausgleichsproblems. Die Stabilität des Algorithmus zur Lösung der Normalgleichungen ist in diesem Fall also nur gering.

Aufgabe N4

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2x+2}$$

und die Stützstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ und $x_4 = 6$.

a) Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_2, x_3, x_4)$ mit dem Aitken-Neville-Schema an der Stelle $x = 3$ aus.

b) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_1, x_3, x_4)$ in Newton-Darstellung.

3+3 Punkte

Lösung:

a) Setze $y_0 := x_2 = 2$, $y_1 := x_3 = 4$ und $y_2 := x_4 = 6$ und wende für y=3 das Aitken-Neville-Schema an:

$$P_{i,k} = P_{i,k-1} + \frac{y_i - y}{y_i - y_{i-k}} (P_{i-1,k-1} - P_{i,k-1}) \quad \text{für} \quad 0 \le k \le i \le n = 2.$$

Erhalte so das Tableau

i	y_i	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
0	2	$f(2) = \frac{1}{6}$		
1	4	$f(4) = \frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	
2	6	$f(6) = \frac{1}{14}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{9}{70}$

$$\overset{\text{Aitken-Neville}}{\Rightarrow} \qquad P(f|x_2, x_3, x_4)(3) = \frac{9}{70}$$

b) Setze $z_0 := x_1 = 0$, $z_1 := x_3 = 4$ und $z_2 := x_4 = 6$ und führe die Newton-Interpolation mit Hilfe der dividierten Differenzen durch:

i	z_i	$[z_i]f$	$[z_i, z_{i-1}]f$	$[z_i, z_{i-1}, z_{i-2}]f$
0	0	$f(0) = \frac{1}{2}$		
1	4	$f(4) = \frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	
2	6	$f(6) = \frac{1}{14}$	$-\frac{1}{70}$	$\frac{1}{70}$

$$\overset{\text{Newton-Interpolation}}{\Rightarrow} \qquad P(f|x_1, x_3, x_4)(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}x + \frac{1}{70}x(x-4).$$