Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Bemelmans, Prof. Dr. S. Maier-Paape

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Sommer 2005
(180 Minuten)
Höhere Mathematik III + IV, Numerische Mathematik

Aufgabe 1: **(12 Punkte)**

Gegeben seien das Vektorfeld

$$V(x,y,z) := \left(z\,e^x - 3y^2\,,\, 4+y, z^2\log(x+1) - zy^3\right)$$

und die Raumkurve

$$\Gamma := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x-2)^2 + y^2 = 1 \wedge z = x\right\}.$$

Mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes berechne man das Kurvenintegral

$$\oint_\Gamma V\,dx\,,$$

wobei der Umlaufsinn von Γ eine Rechtsschraube mit dem Vektor $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ bildet.

Aufgabe 2: **(12 Punkte)**

Fährt man auf der A4 von Aachen nach Köln, so steht man in 9 von 10 Fällen im Stau. Insgesamt kommt man in 3 von 10 Fällen zu spät.
Wenn man im Stau steht, dann kommt man mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% zu spät. Man bestimme die Wahrscheinlichkeiten:

(i) nicht im Stau zu stehen.
(ii) im Stau zu stehen und verspätet zu sein.
(iii) nicht im Stau gestanden zu haben, wenn man zu spät kommt.

Aufgabe 3: **(10 Punkte)**

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dfrac{5y^2}{1+(5xy^2)^2} + \dfrac{10xy}{1+(5xy^2)^2}\,y' = 0\,, & x>1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 4: (12 Punkte)

Seien $a > 0$ und $0 < r < a$.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Torus T mit der Parametrisierung.

$$T(\varphi, t) := ((a + r\cos(t))\cos(\varphi)\,,\ (a + r\cos(t))\sin(\varphi)\,,\ r\sin(t)),$$
$$\varphi \in [0, 2\pi]\,,\ t \in [0, 2\pi].$$

Aufgabe 5: (7 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\arg(f) \in \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 6: (15 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}\, dx\ .$$

Aufgabe 7: (12 Punkte)

Die Funktionen u_n, $n \in \mathbb{N}$ seien definiert durch:

$$u_n(x) := \frac{\sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{x}{n}\right)} - 1}{x^2 + 1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 1

- Parametrisierung von Γ: $\Gamma: \ \gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi + 2 \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi + 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$ (2)

- Fläche die von Γ berandet wird:

$$\mathfrak{F}: \ \eta(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi + 2 \\ r\sin\varphi \\ r\cos\varphi + 2 \end{pmatrix}, \quad (r,\varphi) \in [0,1) \times [0,2\pi)$$ (2)

- Normale an $\mathfrak{F}$: $\quad n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $do = \sqrt{2}\, r \, dr \, d\varphi$ (4)

- $\operatorname{rot} V = (-3zy^2, \ldots, 6y)$ (2)

- $$\oint_\Gamma V\,dx = \int_{\mathfrak{F}} \operatorname{rot} V \cdot n \; do = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3zy^2 + 6y)\, r \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(3(r\cos\varphi + 2)\, r^2 \sin^2\varphi + 6 \cdot r \cdot \sin\varphi\right) r \, d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 6 r^3 \sin^2\varphi \; d\varphi\, dr = \underline{\underline{\frac{6}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi}}$$ (2)

Musterlösung HM34+NUM SS05 W

A2 Ereignisse:

$S \hat{=}$ Im Stau stehen

$V \hat{=}$ verspätet zu sein

Cf. Aufgabenstellung

$$P(S) = \frac{9}{10} \; ; \; P(V) = \frac{3}{10} \; ; \; P(V|S) = \frac{1}{4}$$

(i) $\bar{S} = \complement S = \Omega \setminus S \; \hat{=}$ Nicht im Stau stehen

$$P(\bar{S}) = 1 - P(S) \underset{\text{s.o}}{=} 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$ 3

(ii) $$P(S \cap V) \underset{\text{Def}}{=} P(V|S)\,P(S) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{40}$$ 3

(iii) $$P(\bar{S}|V) = 1 - P(S|V)$$

$$\underset{\text{Def}}{=} 1 - \frac{P(S \cap V)}{P(V)} \underset{\substack{\text{s.o.}\\(ii)}}{=} 1 - \frac{\frac{9}{40}}{\frac{3}{10}} =$$

$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$ 6

Aufgabe 3:

$$\underbrace{\frac{5y^2}{1+(5xy^2)^2}}_{=a(x,y)} + \underbrace{\frac{10xy}{1+(5xy^2)^2}}_{=b(x,y)} y' = 0$$

Prüfen ob DGL exakt:

$$b_x = \frac{10y(1+(5xy^2)^2) - 10xy\,2(5xy^2)5y^2}{(1+(5xy^2)^2)^2}$$

$$a_y = \frac{10y(1+(5xy^2)^2) - 5y^2\,2(5xy^2)5x2y}{(1+(5xy^2)^2)^2}$$

2

Also $a_y = b_x \Rightarrow$ DGL exakt

Def.: $h(x,y) = \int a(x,y)\,dx = \int \frac{5y^2}{1+(5xy^2)^2}\,dx$

$$= \arctan(5xy^2) + c(y)$$

$$\partial_y h(x,y) = \frac{10xy}{1+(5xy^2)^2} + c'(y) = b(x,y) + c'(y)$$

$$\Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = C \in \mathbb{R}$$ 5

$\Rightarrow Y(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}$ 2 und mit $y(1) = 1$ ergibt sich

für $\underline{C = 1}$

Also $\underline{\underline{Y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}}}$ 1

Aufgabe 4:

Flächeninhalt des Torus ist:

$$A(T) = \int_T do = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |T_\varphi \wedge T_t| \, d\varphi \, dt$$

$$T_\varphi = (-(a+r\cos(t))\sin(\varphi), (a+r\cos(t))\cos(\varphi), 0)$$

$$T_t = (-r\sin(t)\cos(\varphi), -r\sin(t)\sin(\varphi), r\cos(t))$$

4

$$T_\varphi \wedge T_t = ((a+r\cos(t))r\cos(\varphi)\cos(t), (a+r\cos(t))r\sin(\varphi)\cos(t), r(a+r\cos(t))\sin(t))$$

$$|T_\varphi \wedge T_t| = r(a+r\cos(t))$$

4

Damit gilt für den Flächeninhalt von T

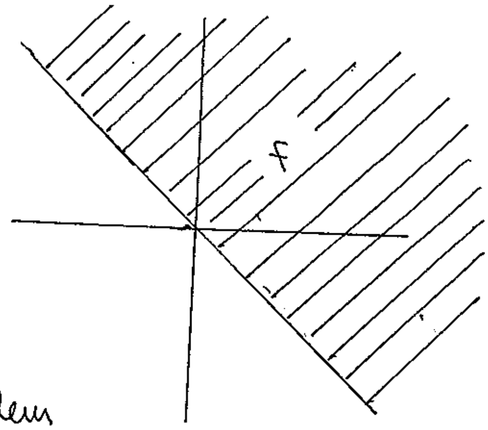
$$A(T) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(a+r\cos(t)) \, d\varphi \, dt$$

$$= 2\pi r \int_0^{2\pi} a + r\cos(t) \, dt = 2\pi r \Big| at + r\sin(t) \Big|_{t=0}^{2\pi}$$

$$= 2\pi r (a 2\pi) = \underline{\underline{4\pi^2 a r}}$$

4

Aufgabe 5



$\arg f \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow \mathrm{Re}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} f\right) \geq 0$

$\Rightarrow \quad e^{-\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} f\right)}$ beschränkt

$\Rightarrow \quad e^{-\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} f\right)} = K$ für eine Konstante $K \in \mathbb{C}$ nach dem Satz von Liouville.

$\Rightarrow \quad -e^{-i\frac{\pi}{4}} f \in \mathrm{Log}\, K \quad \Rightarrow \quad -e^{-i\frac{\pi}{4}} f$ konstant da f stetig $\quad \Rightarrow \quad f$ konstant.

7

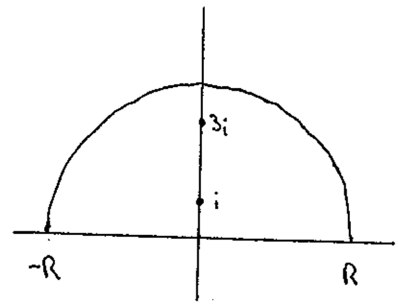
Aufgabe 6

- Setze $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+9)}$. 1

- Für $R>0$ setze $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ mit $\Gamma_1: \gamma_1(t) = t,\ t \in [-R,R]$

und ~~$\Gamma_2: \gamma_2(t) = Re^{it},\ t \in [0,\pi]$~~ $\Gamma_2: \gamma_2(t) = Re^{it},\ t \in [0,\pi]$.

2



- Singularitäten von f in dem von Γ begrenzten Gebiet: $z_1 = i$, $z_2 = 3i$

- Da $\lim\limits_{z\to z_1} f(z)(z-z_1) = \dfrac{e^{-1}}{16i} \neq 0$ ist z_1 eine Polstelle 1. Ordnung und damit

$\operatorname{Res}\limits_{z=z_1} f = \dfrac{e^{-1}}{16i}$. Da $\lim\limits_{z\to z_2} f(z)(z-z_2) = \dfrac{e^{-3}}{-48i} \neq 0$ ist z_2 eine Polstelle

1. Ordnung und damit $\operatorname{Res}\limits_{z=z_2} f = \dfrac{e^{-3}}{-48i}$. 5

- $$\left| \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{iR(\cos t + i\sin t)}}{(R^2e^{2it}+1)(R^2e^{2it}+9)}\, iRe^{it}\,dt \right|$$

(für R groß) $\displaystyle \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{(R^2-1)(R^2-9)}\,dt = \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-9)} \to 0$ für $R \to \infty$ 4

1

- Nach dem Residuensatz ist $\oint_{\Gamma} f\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\limits_{z=z_1} f + \operatorname{Res}\limits_{z=z_2} f \right)$. Also ist

$\oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \pi\left(\dfrac{e^{-1}}{8} - \dfrac{e^{-3}}{24}\right)$ und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \pi\left(\frac{e^{-1}}{8} - \frac{e^{-3}}{24}\right)$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \underline{\underline{\pi\left(\frac{e^{-1}}{8} - \frac{e^{-3}}{24}\right)}}$$ 2

Aufgabe 7

Schätze die $u_n(x)$ unabhängig von x ab.

$$\underbrace{|u_n(x)|}_{\geq 0} = \frac{\sqrt{1+\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}-1}{1+x^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}+1\right)}{(1+x^2)\underbrace{\left(\sqrt{1+\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}+1\right)}_{\geq 2}}$$

$$\leq \frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{(1+x^2)} \overset{n \text{ groß}}{\leq} \frac{C\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^2}{(1+x^2)}$$

$$= C\underbrace{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)}_{<1}\frac{1}{n^2} < \frac{C}{n^2}$$

10

Somit folgt aus dem Weierstraßschen M-Test mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \leq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ auf $\mathbb{R}$.

2

Aufgabe N1

a) Bestimmen Sie die relative Kondition $\kappa_{\text{rel}}(f,x)$ der Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\longmapsto \frac{\cosh(x)-1}{\sinh(x)}$$

an der Stelle $x_0 = 0.1$.

Hinweis: Es gilt $\cosh^2(x) = 1+\sinh^2(x)$.

b) Berechnen Sie $f(x_0)$ einmal in dreistelliger Gleitpunktarithmetik und einmal in Taschenrechnergenauigkeit. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis!

c) Überführen Sie $f(x)$ in eine für $|x| \ll 1$ numerisch stabilere Darstellung.

Hinweis: Taylorentwicklung.

d) Berechnen Sie die Summe der Zahlen $12, 17, 24, 35$ und 9995, indem Sie die Ausdrücke

$$(((12+17)+24)+35)+9995 \quad \text{und} \quad 12+(17+(24+(35+9995)))$$

in dreistelliger Gleitpunktarithmetik auswerten. Wie groß sind die absoluten Fehler? Welche Regel bezüglich der numerisch möglichst stabilen Addition legt Ihnen Ihr Ergebnis nahe?

2+1+2+1 Punkte

Lösung:

a) Es ist $f'(x) = \frac{\sinh^2(x)-(\cosh(x)-1)\cosh(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{\cosh(x)-1}{\sinh^2(x)}$ und damit

$$\kappa_{\text{rel}}(f)(x) = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x}{\sinh(x)}\right|.$$

Auf diese Weise erhält man $\kappa_{\text{rel}}(f)(x_0) = \kappa_{\text{rel}}(f)(10^{-1}) \approx 0.99834$. Das Problem ist folglich gut konditioniert.

b) In Taschenrechnergenauigkeit erhält man $f(x_0) \approx 0.049958$. In dreistelliger Gleitpunktarithmetik ergibt sich $\cosh(x_0) \doteq 1.01$, $\cosh(x_0)-1 \doteq 0.0100$, $\sinh(x_0) \doteq 0.100$ und damit $f(x_0) \doteq 0.100$. Da $\lim\limits_{x\to 0}\cosh(x) = 1$ ist, tritt für $|x| \ll 1$ im Zähler Auslöschung auf und der Algorithmus wird instabil.

c) Die Taylorentwicklung der Funktion $f(x)$ um $\hat{x} = 0$ bis zur Ordnung 2 ergibt

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^3).$$

Für $|x| \ll 1$ leisten die höheren Potenzen der Taylorentwicklung nur einen sehr kleinen Beitrag zum Funktionswert, der im Rahmen der Rechengenauigkeit vernachlässigbar ist. Ersetzt man die Funktion daher durch $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}x$, so läßt sich die Auslöschung vermeiden und man erhält eine stabile Darstellung der Funktion f in diesem Bereich.

d) Exakte Rechnung ergibt $12 + 17 + 24 + 35 + 9995 = 10083$. In dreistelliger Gleitpunktarithmetik erhält man

$$\begin{aligned}
12 + 17 &\doteq 29, \\
(12 + 17) + 24 &\doteq 53, \\
((12 + 17) + 24) + 35 &\doteq 88, \\
(((12 + 17) + 24) + 35) + 9995 &\doteq 10100
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
35 + 9995 &\doteq 10000, \\
24 + (35 + 9995) &\doteq 10000, \\
17 + (24 + (35 + 9995)) &\doteq 10000, \\
12 + (17 + (24 + (35 + 9995))) &\doteq 10000.
\end{aligned}$$

Der absolute Fehler beträgt also im ersten Fall $\Delta_1 = 17$ und im zweiten Fall $\Delta_1 = 83$. Als Merkregel läßt sich ableiten, daß es vorteilhafter ist, die betragsgrößten Summanden zuletzt zu addieren.

Aufgabe N2

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{4}{2x+3}$$

und die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ und $x_3 = 6$.

a) Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_1, x_2, x_3)$ mit dem Aitken-Neville-Schema an der Stelle $x = 3$ aus.

b) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_2, x_3)$ in Newton-Darstellung.

c) Schätzen Sie den Fehler $\max\limits_{x\in[x_0,x_3]} |P(f|x_0, x_2, x_3)(x) - f(x)|$ möglichst genau ab.

2+2+3 Punkte

Lösung:

a) Setze $y_0 := x_1 = 2$, $y_1 := x_2 = 4$ und $y_2 := x_3 = 6$ und wende für $y = 3$ das Aitken-Neville-Schema an:

$$P_{i,k} = P_{i,k-1} + \frac{y_i - y}{y_i - y_{i-k}} \left(P_{i-1,k-1} - P_{i,k-1}\right) \quad \text{für} \quad 0 \le k \le i \le n = 2.$$

Erhalte so das Tableau

i	y_i	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
0	2	$f(2) = \frac{4}{7} \approx 0.57143$		
1	4	$f(4) = \frac{4}{11} \approx 0.36364$	$\frac{36}{77} \approx 0.46753$	
2	6	$f(6) = \frac{4}{15} \approx 0.26667$	$\frac{68}{165} \approx 0.41212$	$\frac{524}{1155} \approx 0.45368$

$$\overset{\text{Aitken-Neville}}{\Rightarrow} \qquad P(f|x_2, x_3, x_4)(3) = \frac{524}{1155} \approx 0.45368$$

b) Führe die Newton-Interpolation mit Hilfe der dividierten Differenzen durch:

i	x_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i-1}]f$	$[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]f$
0	0	$f(0) = \frac{4}{3} \approx 1.3333$		
1	4	$f(4) = \frac{4}{11} \approx 0.36364$	$-\frac{8}{33} \approx -0.24242$	
2	6	$f(6) = \frac{4}{15} \approx 0.26667$	$-\frac{8}{165} \approx -0.048485$	$\frac{16}{495} \approx 0.0032323$

$$\overset{\text{Newton-Interpolation}}{\Rightarrow} \qquad P(f|x_1, x_3, x_4)(x) = \frac{4}{3} - \frac{8}{33}(x-0) + \frac{16}{495}(x-0)(x-4).$$

c) Betrachte zunächst das Knotenpolynom $\omega(x) := (x-0)(x-4)(x-6)$ im Intervall $I := [0,6]$. An den Rändern des Intervalls verschwindet das Knotenpolynom. Es gilt

$$\omega'(x) = 3x^2 - 20x + 24 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{7} \in I.$$

Da $\omega''(x) = 6x - 20$ und damit $\omega''(x_1) > 0$ und $\omega''(x_2) < 0$ ist, liegen an den Stellen x_1 und x_2 lokale Extrema mit $\omega(x_{1,2}) = \frac{160}{27} \mp \frac{112}{27}\sqrt{7}$ vor. Daher ist

$$\max_{x \in I} |\omega(x)| = \frac{160}{27} + \frac{112}{27}\sqrt{7} \approx 16.901.$$

Ableiten von f ergibt $f'(x) = -\frac{8}{(2x+3)^2}$, $f''(x) = \frac{32}{(2x+3)^3}$ und $f'''(x) = -\frac{192}{(2x+3)^4}$. Der Betrag der dritten Ableitung von f ist auf I monoton fallend, da der Nenner $(2x+3)^4$ monoton wächst. Daher nimmt $|f'''(x)|$ auf I sein Maximum an der linken Intervallgrenze $x_0 = 0$ mit $|f'''(0)| = \frac{64}{27}$ an.

Damit erhält man insgesamt

$$\begin{aligned}
\max_{x \in [x_0,x_3]} |P(f|x_0,x_2,x_3)(x) - f(x)| &\leq \max_{x \in [x_0,x_3]} |\omega(x)| \max_{x \in [x_0,x_3]} \frac{|f'''(x)|}{3!} \\
&= \left(\frac{160}{27} + \frac{112}{27}\sqrt{7}\right) \frac{1}{3!} \frac{64}{27} \\
&= \frac{5120}{2187} + \frac{3584}{2187}\sqrt{7} \approx 6.6769.
\end{aligned}$$

Aufgabe N3
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Betrachten Sie das nichtlineare Gleichungssystem

$$Ax = b + \varepsilon F(x).$$

Ermitteln Sie, ob das nichtlineare Gleichungssystem zumindest für einen gewissen Bereich von ε lösbar ist, indem Sie die folgenden Teilaufgaben bearbeiten:

a) Was bedeutet es, daß F Lipschitz-stetig ist?

b) Schreiben Sie das Gleichungssystem für $\varepsilon \neq 0$ in eine Fixpunktgleichung um.

c) Zeigen Sie, daß $\phi(x) := \varepsilon A^{-1}F(x) + A^{-1}b$ für ausreichend kleine $|\varepsilon|$ eine Kontraktion ist.

d) Formulieren Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens für dieses Beispiel. Was müssen Sie voraussetzen?

e) Wo liegt die Lösung für kleine $|\varepsilon|$ ungefähr?

1+1+3+2+1 Punkte

Lösung:

a) Die Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-stetig, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ bezüglich einer Norm $||\cdot||$ des $\mathbb{R}^n$ gilt

$$||F(x) - F(y)|| \leq C\,||x - y||\,.$$

b) Da $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär ist, existiert die Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Anwenden der Inversen auf die nichtlineare Gleichung ergibt

$$Ax = b + \varepsilon F(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}\left(b + \varepsilon F(x)\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \varepsilon A^{-1}F(x) + A^{-1}b$$

und damit die gesuchte Fixpunktgleichung.

c) Zeige: Die Fixpunktfunktion $\phi(x) = \varepsilon A^{-1}F(x) + A^{-1}b$ ist für ausreichend kleine $|\varepsilon|$ eine Kontraktion.

dazu: Für beliebige $v, w \in \mathbb{R}^n$ erhält man mit Hilfe der Operatornorm der Matrix A^{-1} die Abschätzung

$$\left|\left|A^{-1}\left(v - w\right)\right|\right| \leq \left|\left|A^{-1}\right|\right|\,||v - w||\,. \tag{1}$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Da F Lipschitz-stetig bezüglich $||\cdot||$ ist, gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß

$$||F(x) - F(y)|| \leq C\,||x - y|| \tag{2}$$

ist. Der für die Kontraktionseigenschaft zu untersuchende Ausdruck lautet

$$||\phi(x) - \phi(y)|| = \left|\left|\varepsilon A^{-1}\left(F(x) - F(y)\right)\right|\right|.$$

Mit den Abschätzungen (1) und (2) erhält man

$$\begin{aligned} ||\phi(x) - \phi(y)|| &= |\varepsilon|\,\left|\left|A^{-1}\left(F(x) - F(y)\right)\right|\right| \\ &\overset{(1)}{\leq} |\varepsilon|\,\left|\left|A^{-1}\right|\right|\,||F(x) - F(y)|| \\ &\overset{(2)}{\leq} |\varepsilon| C\,\left|\left|A^{-1}\right|\right|\,||x - y||\,. \end{aligned}$$

Daher ist ϕ eine Kontraktion, falls

$$|\varepsilon| C\,\left|\left|A^{-1}\right|\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\varepsilon| < \frac{1}{C\,||A^{-1}||}$$

ist.

d) Um das Newton-Verfahren anzuwenden, muß zunächst vorausgesetzt werden, daß F stetig differenzierbar ist. In diesem Fall formt man zunächst die nichtlineare Gleichung in das Nullstellenproblem $G(x) = 0$ der Funktion

$$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto Ax - \varepsilon F(x) - b$$

um. Die Funktion G ist wiederum stetig differenzierbar und besitzt die Jacobi-Matrix

$$DG(x) = A - \varepsilon\ DF(x).$$

Daher lautet für $k \in \mathbb{N}_0$ die zugehörige Newton-Iteration $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$ mit $DG(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -G(x^{(k)})$, also für dieses Beispiel

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \Delta x^{(k)}, \\ (A - \varepsilon\ DF(x^{(k)}))\Delta x^{(k)} &= b - Ax^{(k)} + \varepsilon F(x^{(k)}). \end{aligned}$$

e) Um eine Schätzung der Lösung x_ε für kleine $|\varepsilon|$ zu ermitteln, setzt man aufgrund stetiger Abhängigkeit von ε nun $\varepsilon = 0$ und erhält so als Näherung

$$x_\varepsilon \approx x_0 = A^{-1}b.$$

Aufgabe N4

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 21 & -51 & 86 \\ 0 & -25 & 62 \\ 28 & 32 & -77 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -47 \\ -1 \\ 54 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von A mit Hilfe von Givens-Rotationen.

Hinweis: Es genügt, wenn Sie Q als Produkt von Givens-Rotationen angeben. Sie brauchen das Produkt nicht auszumultiplizieren.

b) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe der QR-Zerlegung.

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

d) Statt der exakten rechten Seite b verfügen Sie nur über eine Approximation $\tilde{b}$, die in der Maximumsnorm $||\cdot||_\infty$ mit einem relativen Fehler von 4 % behaftet ist. Wie groß ist der relative Fehler der Lösung $\tilde{x}$ des gestörten linearen Gleichungssystems $A\tilde{x} = \tilde{b}$ in der Maximumsnorm höchstens?

Hinweis: Die Operatornorm der Inversen von A beträgt $||A^{-1}||_\infty = \frac{1009}{4225}$.

2+1+2+2 Punkte

Lösung:

a) Löse das lineare Gleichungssystem mit Givens-Rotationen:

Eliminiere $A_{31} = 28$: $r = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35$
$\Rightarrow c_1 = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$, $s_1 = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}$,

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad A^{(1)} = G_1 A = \begin{pmatrix} 35 & -5 & -10 \\ 0 & -25 & 62 \\ 0 & 60 & -115 \end{pmatrix}.$$

Eliminiere $A^{(1)}_{32} = 60$: $r = \sqrt{(-25)^2 + 60^2} = 65$
$\Rightarrow c_2 = \frac{-25}{65} = -\frac{5}{13}$, $s_2 = \frac{60}{65} = \frac{12}{13}$,

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ 0 & -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = G_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 35 & -5 & -10 \\ 0 & 65 & -130 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte QR-Zerlegung lautet $A = QR$ mit $Q = G_1^T G_2^T$ und $R = A^{(2)}$.

b) Für die Determinante einer Rotationsmatrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\det(S) = 1$. Damit ist auch für die Givens-Rotationen $\det(G_1) = \det(G_2) = 1$ und folglich auch

$$\begin{aligned} \det Q &= \det(G_1^T G_2^T) = \det(G_1^T) \cdot \det(G_2^T) \\ &= \det(G_1^{-1}) \cdot \det(G_2^{-1}) = \det(G_1)^{-1} \cdot \det(G_2)^{-1} = 1 \end{aligned}$$

und es gilt

$$\det(A) = \det(QR) = \underbrace{\det(Q)}_{=1} \det(R) = \det(R) = 35 \cdot 65 \cdot (-13) = -29575.$$

c) Anwendung der Givens-Rotationen auf die rechte Seite b der linearen Gleichung ergibt

$$b^{(1)} = G_1 b = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 70 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b^{(2)} = G_2 b^{(1)} = \begin{pmatrix} 15 \\ 65 \\ -26 \end{pmatrix}.$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhält man die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$x = \left(\frac{12}{7}, 5, 2\right)^T.$$

d) Bezüglich einer Störung in der rechten Seite b des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\frac{||\tilde{x} - x||_\infty}{||x||_\infty} \leq \kappa_\infty(A) \frac{\left|\left|\tilde{b} - b\right|\right|_\infty}{||b||_\infty}$$

mit $\kappa_\infty(A) = ||A^{-1}||_\infty \, ||A||_\infty$. Laut Aufgabenstellung ist $\frac{||\tilde{b}-b||_\infty}{||b||_\infty} = \frac{4}{100}$ und laut Hinweis gilt $||A^{-1}||_\infty = \frac{1009}{4225}$. Die Operatornorm der Matrix A ergibt sich als

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq 3} \sum_{j=1}^{3} |A_{ij}| = 158.$$

Damit ist

$$\frac{||\tilde{x} - x||_\infty}{||x||_\infty} \leq \kappa_\infty(A) \frac{\left|\left|\tilde{b} - b\right|\right|_\infty}{||b||_\infty} = \frac{1009}{4225} \cdot 158 \cdot \frac{4}{100} = \frac{159422}{105625} \approx 1.5093.$$