Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. S. Maier–Paape
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 2003

Teil B

Höhere Mathematik III + IV,
Numerische Mathematik,
Prof. Dr. J. Bemelmans

Aufgabe 1: Gegeben sei das Gebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 > 0\}$ und das Vektorfeld $f\colon\; G \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) \;=\; \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\,(y,-x)\;, \qquad (x,y) \in G\;.$$

(4) **(a)** Man zeige, dass das Kurvenintegral

$$I(\Gamma) \;:=\; \int_\Gamma f \cdot d\gamma$$

in G vom Wege unabhängig ist.

(3) **(b)** Man berechne $I(\Gamma)$ für $\Gamma\colon\; \gamma(t) = (-\cos\pi t + 1\;,\; t - \sin 2\pi t)\;,\; 1 \;\le\; t \;\le\; 2\;.$

Aufgabe 2: Gegeben sei der Körper $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2 \;<\; 4,\; -1 \;<\; z \;<\; 1\}$, das Vektorfeld

(11)

$$f = f(x,y,z) \;=\; \big(\sin z\;,\; y^2 z \;-\; \cos x\;,\; xz^2 \;+\; \arctan\,(x\cdot y)\big)\;, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\;,$$

und die skalare Funktion

$$u \;=\; u(x,y,z) \;=\; x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^3\;, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\;.$$

Es sei ∂K die Berandung von K und $n \in \mathbb{R}^3$ die äußere Einheitsnormale auf ∂K. Man berechne das Oberflächenintegral

$$I \;:=\; \int_{\partial K} \big(f \;+\; \operatorname{rot} f \;+\; \operatorname{grad} u\big) \;\cdot\; n\; do\;,$$

indem man I mit dem Gaußschen Satz in ein Volumenintegral verwandelt und dieses berechnet.

Aufgabe 3: Gegeben sei das in $L^2(0,\pi)$ vollständige Orthonormalsystem

$$\ell_0(x) \;=\; \sqrt{\frac{1}{\pi}}\;,\; \ell_k(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \;\cdot\; \cos(kx)\;, \quad k \in \mathbb{N}\;,\; x \in [0,\pi]\;.$$

(4) **(a)** Man bestimme für $f(x) = x - \frac{\pi}{2}\;,\; x \in [0,\pi]$, die Koeffizienten der Fourier–Reihe

$$T_f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \big(f,\ell_k\big)_{L^2(0,\pi)} \cdot \ell_k(x)\;.$$

(4) **(b)** Bestimmen Sie mit dem Fourier–Ansatz $u(t,x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(t)\cdot\ell_k(x)$ und Koeffizientenvergleich eine formale Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\,u \;&=\; \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u\;, && t \;>\; 0\,,\; 0 \;<\; x \;<\; \pi\;,\\ \frac{\partial}{\partial x}\,u(t,0) \;&=\; \frac{\partial}{\partial x}\,u(t,\pi)\;, && t \;>\; 0\;,\\ u(0,x) \;&=\; f(x)\;, && 0 \;<\; x \;<\; \pi\;. \end{aligned}$$

---

b i t t e   w e n d e n !!!

Aufgabe 4: Wir untersuchen folgendes Urnenexperiment: in einer Urne befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln; es wird eine Kugel gezogen, so dann sie selbst und eine

(6) weitere Kugel der gleichen Farbe in die Urne gelegt (Polya–Urnenmodell für die Ausbreitung einer Krankheit = rote Kugel).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man

(a) bei den ersten beiden Zügen jeweils eine rote Kugel zieht ,

(b) bei den ersten drei Zügen insgesamt genau eine rote Kugel zieht ,

(c) bei den ersten drei Zügen mindestens zwei weiße Kugeln zieht ?

Aufgabe 5:

(3) **(a)** Man bestimme alle gebrochen–linearen Abbildungen

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + 1} \quad \text{mit den Fixpunkten 0 und 1 .}$$

(4) **(b)** Man bestimme nun alle f so, dass außerdem die Geraden

$\{w \in \mathbb{C}\colon\ w = 1 + it \ ,\ -\infty < t < \infty\}$ und $\{w \in \mathbb{C}\colon\ w = i + t \ ,\ -\infty < t < \infty\}$

Bilder von zwei Geraden der z–Ebene sind.

Hinweis: Es gibt genau zwei Abbildungen mit dieser Eigenschaft. Um sie anzugeben mag es hilfreich sein, die inverse Abbildung $z = f^{-1}(w)$ zu bestimmen.

Aufgabe 6: Gegeben sei die Funktion $f\colon\ \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \sinh \frac{i}{z} \ .$$

(2) **(a)** Man bestimme alle Nullstellen von $f\colon\ M = \{z \in \mathbb{C}\colon\ f(z) = 0\}$.

Sei nun $g(z) := \dfrac{1}{f(z)}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup M)$.

(2) **(b)** Man zeige: $z = 0$ ist keine isolierte Singularität von g .

(3) **(c)** Man zeige: g hat in $z_1 = \dfrac{1}{\pi}$ einen Pol der Ordnung 1; man berechne $\operatorname{Res}(g, z_1)$.

(6) **(d)** Man berechne $\displaystyle\oint_{|z|=1} \big(g(z) + f(z)\big)\, dz$.
