Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Patrick Overath

Übungen zur Vorlesung
Geometrische Analysis III – Differentialtopologie
20.06.2013

Abgabe Aufgaben 11–15: 4.7.2013 in der Vorlesung

Abgabe Aufgaben 16–20: 11.7.2013 in der Vorlesung

Aufgabe 11 **[Verallgemeinerter Satz über inverse Funktionen: der nichtkompakte Fall]**

Sei $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ eine glatte Abbildung zwischen den randlosen Mannigfaltigkeiten $\mathscr{M}$ und $\mathscr{N}$, und f bilde eine glatte (nicht notwendig kompakte) randlose Untermannigfaltigkeit $\mathscr{Z} \subset \mathscr{M}$ diffeomorph auf $f(\mathscr{Z})$ ab. Außerdem gelte für alle $z \in \mathscr{Z}$, dass

$$df_z : T_z\mathscr{M} \to T_{f(z)}\mathscr{N}$$

ein Isomorphismus ist.

Zeigen Sie, dass f eine hinreichend kleine relativ offene Umgebung von $\mathscr{Z}$ in $\mathscr{M}$ auf eine relativ offene Umgebung von $f(\mathscr{Z})$ *diffeomorph* abbildet.

Hinweise: Die Aussage der Aufgabe 8 zur Elementaren Differentialtopologie aus dem WS 12-13 dürfen Sie ohne Beweis benutzen, um zu einer lokal endlichen Überdeckung $\{W_l\}$ von $f(\mathscr{Z})$ mit relativ offenen Mengen $W_l \subset \mathscr{N}$ lokale Inverse $g_l : W_l \to \mathscr{M}$ von f zu finden. Dann machen Sie sich klar, dass die Menge

$$W := \{y \in \bigcup_l W_l : g_i(y) = g_j(y) \quad \text{falls } y \in W_i \cap W_j\}$$

ein geeigneter Definitionsbereich für eine stückweise definierte globale Inverse $g : W \to \mathscr{M}$ ist und eine relativ offene Umgebung von $f(\mathscr{Z})$ in $\mathscr{N}$ enthält. Zur Erinnerung: Eine lokal finite offene Überdeckung *einer Menge $X \subset Y \subset \mathbb{R}^N$ ist eine abzählbare Familie relativ offener Mengen in Y, deren Vereinigung X überdeckt, derart, dass für jedes $x \in X$ ein $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ existiert, so dass der offene Ball $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}^N$ nur endlich viele dieser relativ offenen Mengen schneidet.*

Aufgabe 12 **[Kettenregel für Abbildungen zwischen berandeten Mannigfaltigkeiten]**

Seien $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^M$, $\mathscr{N} \subset \mathbb{R}^N$, und $\mathscr{L} \subset \mathbb{R}^L$, glatte Mannigfaltigkeiten, wobei ein nichtleerer Rand jeweils zugelassen ist. Dann gilt für glatte Abbildungen $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ und $g : \mathscr{N} \to \mathscr{L}$, und jeden Punkt $x \in \mathscr{M}$, dass das Differential $d(g \circ f)_x : T_x\mathscr{M} \to T_{g(f(x))}\mathscr{L}$ existiert, und dass

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

Hinweis: Beachten Sie die Definition 3.3 der Vorlesung und setzen Sie die Funktionen geeignet fort, um ähnlich wie in Proposition 1.9 zu schließen.

Aufgabe 13 **[Beispiele berandeter Mannigfaltigkeiten]**

(i) Zeigen Sie, dass für $a > 0$ der abgeschlossene *Hyperboloid*

$$H_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq a\}$$

eine berandete Untermannigfaltigkeit des R^3 ist.

(ii) Für welche $a > 0$ ist der Schnitt $H_a \cap \mathbb{S}^2$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand? Wie sehen diese Schnittmannigfaltigkeiten aus?

Aufgabe 14 **[Brouwers Fixpunktsatz, Retraktionen und Vektorfelder]**

(i) Zeigen Sie mit Hilfe eines Beispiels, dass für eine glatte Abbildung $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ für $n \geq 2$ nicht notwendig ein Fixpunkt existieren muss, wobei $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes, dass jede Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} \geq 0$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$, mindestens einen nichtnegativen Eigenwert $\lambda \geq 0$ und dazu einen Eigenvektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ besitzt.

(iii) Beweisen Sie mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes, dass es keine stetige Abbildung $f : \overline{\mathbb{B}} \to \mathbb{S}^{n-1}$ gibt, so dass $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

(iv) Zeigen Sie: Jedes stetige Vektorfeld $v \in C^0(\overline{\mathbb{B}^n}, \mathbb{R}^n)$ mit $v(x) = |v(x)|x \neq 0$ für alle $x \in \partial\overline{\mathbb{B}^n}$ besitzt mindestens eine Nullstelle in $\overline{\mathbb{B}^n}$.

(v) Zeigen Sie: Jedes stetige Vektorfeld $v \in C^0(\overline{\mathbb{B}^n}, \mathbb{R}^n)$ mit $v(x) \cdot x > 0$ für alle $x \in \partial\overline{\mathbb{B}^n}$ besitzt mindestens eine Nullstelle in $\overline{\mathbb{B}^n}$.

(vi) Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes: Jede stetige Abbildung $f : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\partial\overline{\mathbb{B}^n}) \subset \overline{\mathbb{B}^n}$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.

(vii) Zeigen Sie: Jedes stetige Vektorfeld $v \in C^0(\overline{\mathbb{B}^n}, \mathbb{R}^n)$ mit $0 \neq v(-x) = -v(x)$ für alle $x \in \partial\overline{\mathbb{B}^n}$ besitzt mindestens eine Nullstelle in $\overline{\mathbb{B}^n}$.

Hinweis: In Teil (iii) soll also eine Version des Retraktionssatzes, Satz 3.11 der Vorlesung, für stetige Abbildungen speziell auf $\mathscr{M}^n = \overline{\mathbb{B}^n}$ bewiesen werden. Für Teil (iv) benutze man Teil (iii) durch Betrachtung des auf Länge Eins normierten Vektorfeldes, ebenso zum Beweis von Teil (v), wenn man die auf Länge Eins normierte Version der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -v(2x) & \text{für } |x| < \frac{1}{2} \\ \left(2 - \frac{1}{|x|}\right)x + 2(|x| - 1)v\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

betrachtet. Für Teil (vi) benutze man Teil (v), und Teil (vii) folgt aus (vi). Auch wenn Sie einzelne Teile nicht bewiesen haben, können Sie die zugehörigen Aussagen für andere Teile benutzen.

Aufgabe 15 **[Transversaler Schnitt mit Unterräumen – slicing]**

Sei $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^M$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass "fast jeder" lineare Unterraum $V \subset \mathbb{R}^M$ der Dimension l die Mannigfaltigkeit $\mathscr{M}$ transversal schneidet.

Hinweis: Zur Präzisierung des Begriffs "fast jeder" und zum Beweis der Aussage betrachte man die Menge Σ aller linear unabhängigen l-Tupel von Vektoren im $\mathbb{R}^M$ und die Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^l \times \Sigma \to \mathbb{R}^M$ mit $\Psi((t_1, \ldots, t_l), (v_1, \ldots, v_l)) := \sum_{i=1}^{l} t_i v_i$.

Aufgabe 16 **[Nicht-singuläre Abbildungen liegen lokal dicht]**

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung, wobei $n > 1$, und $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine glatte Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $dg_x \neq 0$ für alle $x \in K$ und so dass $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in K$.

Hinweis: Zeige, dass die Abbildung $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch $F(x, A) := df_x + A$ eine Submersion ist und wähle dann $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ geeignet, so dass $F(\cdot, A)$ transversal zu $\{0\}$ ist, d.h. $F(\cdot, A) \pitchfork \{0\}$, wobei man sich überlegen sollte, warum $n > 1$ vorausgesetzt ist.

Aufgabe 17 **[Brennpunkte]**

Sei $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^M$ eine $(M-1)$ dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Dann heißt $y \in \mathbb{R}^M$ ein *Brennpunkt* von $\mathscr{M}$, falls y ein kritischer Wert der *Normalenbündelabbildung* $h : \mathrm{Nor}(\mathscr{M}) \to \mathbb{R}^M$, gegeben durch $h(x, v) := x + v$ für $(x, v) \in \mathrm{Nor}(\mathscr{M})$.

(i) Geben Sie die Brennpunkte der Parabel, also des Graphen der Funktion $f(t) = t^2$ im $\mathbb{R}^2$, an.

(ii) Es sei $M = 2$ und $x \in \mathscr{M}$. Durch Wahl geeigneter Koordinaten im $\mathbb{R}^2$ kann man annehmen, dass $x = 0 \in \mathbb{R}^2$ und dass der erste Standardbasisvektor $e_1 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ den Tangentialraum $T_0\mathscr{M}$ aufspannt. Zeigen Sie, dass $\mathscr{M}$ in der Nähe von $x = 0$ mit dem Graphen einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$ übereinstimmt.

(iii) Die Größe $\kappa_{\mathscr{M}}(x) = f''(0)$ heißt *Krümmung* von $\mathscr{M}$ bei x. Zeigen Sie: Falls $\kappa_{\mathscr{M}}(x) \neq 0$, dann hat $\mathscr{M}$ einen Brennpunkt auf dem Normalraum $\mathrm{Nor}_x\mathscr{M}$ im Abstand $1/\kappa_{\mathscr{M}}(x)$ von x.

Hinweis: Zeigen Sie für Teil (iii), dass der Normalraum $\mathrm{Nor}_\xi\mathscr{M}$ von $\mathscr{M}$ bei Punkten $\xi \in \mathscr{M}$ nahe x durch den Vektor $(-f'(\xi), 1) \in \mathbb{R}^2$ aufgespannt wird, um dann die Normalenbündelabbildung $h : \mathrm{Nor}(\mathscr{M}) \to \mathbb{R}^2$ auszurechnen.

Aufgabe 18 **[Ausschneiden geschachtelter Untermannigfaltigkeiten]**

Seien $\mathscr{Z}^t \subset \mathscr{N}^n \subset \mathscr{L}^l \subset \mathbb{R}^L$ glatte randlose Untermannigfaltigkeiten der Dimensionen $t \leq n \leq l$ und $z \in \mathscr{Z}$. Zeigen Sie: Es existieren eine offene Umgebung $W_z \subset \mathbb{R}^L$ von z und $l - t$ unabhängige Funktionen $g_1, \ldots, g_{l-t} \in C^\infty(W_z \cap \mathscr{L})$, so dass

$$\mathscr{Z} \cap W_z = \{\zeta \in W_z \cap \mathscr{L} : g_1(\zeta) = \cdots = g_{l-t}(\zeta) = 0\},$$
$$\mathscr{N} \cap W_z = \{\zeta \in W_z \cap \mathscr{L} : g_{n-t+1}(\zeta) = \cdots = g_{l-t}(\zeta) = 0\}.$$

Hinweis: Wenden Sie Prop. 1.23 der Vorlesung des WS12-13 auf $\mathscr{Z} \subset \mathscr{N}$ und $\mathscr{N} \subset \mathscr{L}$ an und setzen Sie die implizit darstellenden Funktionen geschickt zusammen. Anschließend ist noch deren Unabhängigkeit zu zeigen, welche ebenfalls aus Prop. 1.23 im Zusammenspiel mit Prop. 1.24 gezeigt werden kann.

Aufgabe 19 **[Normalenbündel allgemein]**

(i) Seien $\mathscr{Z}^t \subset \mathscr{N}^n \subset \mathbb{R}^N$ glatte Untermannigfaltigkeiten der Dimensionen $t \leq n \leq N$, dann ist das *Normalenbündel von $\mathscr{Z}$ in $\mathscr{N}$* die Menge

$$\mathrm{Nor}(\mathscr{Z}, \mathscr{N}) := \{(z, v) : z \in \mathscr{Z},\, v \in T_z\mathscr{N} \,\&\, v \in (T_z\mathscr{Z})^\perp\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathrm{Nor}(\mathscr{Z}, \mathscr{N})$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n ist.

(ii) Sei $\mathbb{S}^{n-1}$ die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre eingebettet in $\mathbb{S}^n$ via der kanonischen Einbettung $k(x_1, \ldots, x_{n-1}) := (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, dass das orthogonale Komplement von $T_x\mathbb{S}^{n-1}$ in $T_x\mathbb{S}^n$ durch den Vektor $(0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ aufgespannt wird. Zeigen Sie darüberhinaus, dass das Normalenbündel von $\mathbb{S}^{n-1}$ in $\mathbb{S}^n$ diffeomorph zu der Mannigfaltigkeit $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ ist.

(iii) Seien $\mathscr{Z}^t \subset \mathscr{N}^n \subset \mathbb{R}^N$ glatte randlose Untermannigfaltigkeiten der Dimensionen $t \leq n \leq N$. Zeigen Sie, dass es einen Diffeomorphismus von einer relativ offenen Umgebung von $\mathscr{Z} \times \{0\}$ in $\mathrm{Nor}(\mathscr{Z}, \mathscr{N})$ auf eine relativ offene Umgebung von $\mathscr{Z}$ in $\mathscr{N}$ gibt.

Hinweise: Für Teil (i) benutzt man Aufgabe 18 und dann die Methode wie beim Beweis von Proposition 3.21 der Vorlesung. Für Teil (iii) benutzt man die Projektion $\pi_{\mathscr{N}} : B_\varepsilon(\mathscr{N}) \to \mathscr{N}$ (bzw. $\pi_{\mathscr{N}} : B(\mathscr{N}, \varepsilon_{\mathscr{N}}) \to \mathscr{N}$) aus Satz 3.17 und die Normalenbündelabbildung $h : \mathrm{Nor}(\mathscr{Z}, \mathscr{N}) \to \mathbb{R}^N$ mit $h(z, v) := z + v$, für die das Urbild $W := h^{-1}(B_\varepsilon(\mathscr{N}))$ (bzw. $h^{-1}(B\mathscr{N}, \varepsilon_{\mathscr{N}})$) eine relativ offene Umgebung von $\mathscr{Z}$ in $\mathrm{Nor}(\mathscr{Z}, \mathscr{N})$ darstellt. Die Komposition $\pi_{\mathscr{N}} \circ h|_W$ ist dann gleich der Identität auf $\mathscr{Z}$, so dass man mit Aufgabe 11 den gewünschten Diffeomorphismus erhält.

Aufgabe 20 **[ε-Umgebung einer Mannigfaltigkeit]**

Zeigen Sie, dass zu jeder offenen Umgebung V einer randlosen glatten Mannigfaltigkeit $\mathscr{N}^n \subset \mathbb{R}^N$ eine glatte Funktion $\varepsilon_{\mathscr{N}} : \mathscr{N} \to (0, \infty)$ existiert, so dass die Menge

$$B(\mathscr{N}, \varepsilon_{\mathscr{N}}) := \{w \in \mathbb{R}^N : \exists y = y(w) \in \mathscr{N} : |w - y| < \varepsilon_{\mathscr{N}}(y)\}$$

in V enthalten ist. Zeigen Sie für den Fall, dass $\mathscr{N}$ kompakt ist, dass $\varepsilon_{\mathscr{N}}$ als konstante Funktion gewählt werden kann.

Hinweis: Wählen Sie eine lokal finite Überdeckung $\{U_k\}$ (vgl. Hinweis zu Aufgabe 11) von $\mathscr{N}$ mit offenen Mengen U_k, so dass $\varepsilon_k > 0$ existiert, so dass

$$B_{\varepsilon_k}(U_k) := \{z \in \mathbb{R}^N : \mathrm{dist}(z, U_k) \equiv \inf_{u \in U_k} |z - u| < \varepsilon_k\}$$

in V enthalten ist für alle k. Dann wähle eine Zerlegung der Eins bezüglich dieser Überdeckung, d.h. Funktionen $\eta_k \in C_0^\infty(U_k)$ mit $\eta_k \geq 0$ und $\sum_k \eta_k(y) = 1$ für alle $y \in \mathscr{N}$. Zeigen Sie dann, dass $\varepsilon_{\mathscr{N}} := \sum_k \eta_k \varepsilon_k$ die gewünschten Eigenschaften hat.
