Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Patrick Overath

Übungen zur Vorlesung Elementare Differentialtopologie 10.12.2012

Aufgabe 1 **[Diffeomorphismen]**

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass nicht jede glatte, bijektive Abbildung zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten[1] ein Diffeomorphismus sein muss.

Aufgabe 2 **[Parametrisierung der Sphäre]**

(i) Zeigen Sie mit Hilfe der stereographischen Projektion, dass man die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit nur zwei lokalen Parametrisierungen überdecken kann.

Hinweis: Die Stereographische Projektion π_N *von* $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ *auf die* $x-y$*-Ebene* $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \cong \mathbb{R}^2$ *lässt sich geometrisch folgendermaßen beschreiben: Jeder Strahl, der vom Nordpol* $N := (0,0,1)$ *ausgeht und die* $\mathbb{S}^2$ *in einem weiteren Punkt* $p \in \mathbb{S}^2$ *trifft, schneidet die* $x-y$*-Ebene in einem Punkt* $\pi_N(p) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Verallgemeinern Sie die stereographische Projektion auf einen Diffeomorphismus von $\mathbb{S}^k \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^k$, wobei $\mathbb{S}^k := \{x \in \mathbb{R}^{k+1} : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ und $N := (0,\dots,0,1) \in \mathbb{R}^{k+1}$.

(iii) Zeigen Sie, dass man die k-dimensionale Einheitssphäre $\mathbb{S}^k$ nicht durch eine einzige Parametrisierung beschreiben kann.

Aufgabe 3 **[Diagonale]**

Für eine Menge $X \subset \mathbb{R}^M$ nennt man die Menge

$$\Delta(X) := \{(x,x) : x \in X\} \subset X \times X$$

die *Diagonale* von $X \times X$. Zeigen Sie:

(i) $\Delta(X)$ ist diffeomorph zu X.

(ii) Falls $X = \mathscr{M}$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist, dann ist auch $\Delta(\mathscr{M})$ eine glatte Mannigfaltigkeit.

(iii) Sei $f : \mathscr{M} \to \mathscr{M} \times \mathscr{M}$ die glatte Abbildung gegeben durch $f(x) := (x,x)$, wobei $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^M$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie für das Differential von f die Beziehung

$$df_x(v) = (v,v) \qquad \text{für alle } \; v \in T_x\mathscr{M}.$$

(iv) Sei $\Delta(\mathscr{M})$ für eine glatte Mannigfaltigkeit $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^M$ die Diagonale der Produktmannigfaltigkeit $\mathscr{M} \times \mathscr{M}$ (vgl. Prop. 1.3 der Vorlesung). Zeigen Sie für den Tangentialraum von $\Delta(\mathscr{M})$ die Beziehung

$$T_{(x,x)}\Delta(\mathscr{M}) = \Delta(T_x\mathscr{M}).$$

[1] Der Begriff *Mannigfaltigkeit* ist in allen Aufgaben im Sinne der Definition 1.2 der Vorlesung als Untermannigfaltigkeit eines umgebenden euklidischen Raums zu verstehen.

Aufgabe 4 **[Diffeomorphismen in euklidischen Räumen]**

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ *nicht* diffeomorph sind, falls $m \neq n$.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein lokaler Diffeomorphismus. Zeige, dass das Bild von f ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist. Zeige dann, dass f die Menge $\mathbb{R}$ diffeomorph auf dieses Intervall I abbildet.

(iii) Konstruieren Sie einen lokalen Diffeomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der aber *kein* Diffeomorphismus auf sein Bild ist.

(iv) Jeder lokale Diffeomorphismus $f : X \to Y$, wobei $X \subset \mathbb{R}^M$ und $Y \subset \mathbb{R}^N$ ist ein diffeomorphismus auf eine relativ offene Teilmenge von Y, falls f injektiv ist.

Aufgabe 5 **[Immersionen]**

Seien $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$, $\mathscr{O}$ und $\mathscr{P}$ glatte Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie:

(i) Wenn $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ und $g : \mathscr{O} \to \mathscr{P}$ Immersionen sind, dann auch $f \times g : \mathscr{M} \times \mathscr{O} \to \mathscr{N} \times \mathscr{P}$. *Hinweis zur Erinnerung:* $(f \times g)(x, y) := (f(x), g(y))$.

(ii) Falls $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ und $g : \mathscr{N} \to \mathscr{O}$ Immersionen sind, dann auch $g \circ f : \mathscr{M} \to \mathscr{O}$.

(iii) Falls $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ eine Immersion ist, dann auch die Einschränkung $f|_{\mathscr{Z}} : \mathscr{Z} \to \mathscr{N}$ von f auf eine Untermannigfaltigkeit $\mathscr{Z} \subset \mathscr{M}$.

(iv) Falls $\dim \mathscr{M} = \dim \mathscr{N}$, dann sind Immersionen $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ lokale Diffeomorphismen, und umgekehrt sind lokale Diffeomorphismen $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ auch Immersionen.

Aufgabe 6 **[Kurven auf dem Torus]**

Benutzen Sie zu der Bearbeitung dieser Aufgabe die Aussagen aus Aufgabe 5.

(i) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{S}^1$ gegeben durch

$$g(t) := \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix}$$

ein lokaler Diffeomorphismus ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ gegeben durch $G := g \times g$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.

(iii) Falls L ein 1-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^2$ ist, dann ist die Einschränkung $G|_L : L \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ von G auf L eine Immersion.

(iv) Zeigen Sie, dass G injektiv ist, falls die Gerade L eine irrationale Steigung hat.

(v) Zeigen Sie, dass das Bild $G(L)$ dicht in $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ liegt, falls L eine irrationale Steigung hat.

(vi) Zeigen Sie, dass $G|_L : L \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ eine periodische Parametrisierung einer geschlossenen Kurve auf dem Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ liefert, falls die Steigung von L rational ist.

(vii) Geben Sie eine Einbettung des Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$ in den $\mathbb{R}^3$ an. *Hinweis: Ziel ist die Darstellung des Torus als Rotationsfläche im $\mathbb{R}^3$. Ähnlich wie im Beispiel* $\boxed{12}$ *der Vorlesung mache man sich klar, dass die Zuordnung eines Punktes $(x, y) = (\cos\phi, \sin\phi) \in \mathbb{S}^1$ auf seinen Polarwinkel ϕ eine glatte Abbildung ist.*

(viii) Nutzen Sie die Einbettung des Torus in den $\mathbb{R}^3$, um die in Teil [vi] erhaltenen geschlossenen Kurven als periodisch parametrisierte Kurven auf dem Torus im $\mathbb{R}^3$ darzustellen (Torusknoten).

Aufgabe 7 **[Lissajous-Kurven]**

(i) Zeigen Sie, dass die Lissajous-Kurven

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} A\sin(at+\delta) \\ B\sin(bt) \end{pmatrix} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

für bestimmte Parameter a, b, A, B, δ nicht injektive Immersionen sind.

(ii) Modifizieren Sie die Parametrisierungen aus Teil (i) so, dass Sie eine injektive Immersion $\tilde{\gamma} : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ erhalten, die aber trotzdem keine Einbettung ist (vgl. mit Beispiel $\boxed{10}$ der Vorlesung.

Aufgabe 8 **[Verallgemeinerter Satz über inverse Funktionen]**

Sei $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ eine glatte Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten $\mathscr{M}$ und $\mathscr{N}$. Darüberhinaus sei $f|_{\mathscr{Z}} : \mathscr{Z} \to \mathscr{N}$ injektiv auf einer kompakten Untermannigfaltigkeit $\mathscr{Z} \subset \mathscr{M}$, und es gelte für alle $z \in \mathscr{Z}$, dass

$$df_z : T_z\mathscr{M} \to T_{f(z)}\mathscr{N}$$

ein Isomorphismus ist.

Zeigen Sie, dass f eine hinreichend kleine relativ offene Umgebung von $\mathscr{Z}$ in $\mathscr{M}$ auf eine relativ offene Umgebung von $f(\mathscr{Z})$ *diffeomorph* abbildet. Wieso ist das eine Verallgemeinerung von dem Satz über inverse Funtkionen, Satz 1.10 der Vorlesung?

Hinweis: Nach Aufgabe 4 (iv) reicht es, die Injektivität von f auf einer Umgebung von $\mathscr{Z}$ zu zeigen.

Aufgabe 9 **[(Verallgemeinerte) Hyperboloiden]**

(i) Zeigen Sie, dass der Wert 0 der einzige kritische Wert der Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) := x^2 - y^2 - z^2$$

ist.

(ii) Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ mit strikt positivem Produkt ab, dass die Urbildmannigfaltigkeiten $f^{-1}(a)$ und $f^{-1}(b)$ diffeomorph sind.

(iii) Sei p ein Polynom in k Variablen mit der Homogenitätsbeziehung

$$p(tx_1, \ldots, tx_k) = t^l p(x_1, \ldots, x_k) \qquad \text{für alle } x_1, \ldots, x_k$$

für ein $l > 0$. Zeigen Sie, dass für $a \neq 0$ die Urbilder $p^{-1}(a)$ Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^k$ der Dimension $k - 1$ sind.

(iv) Zeigen Sie, dass alle Mannigfaltigkeiten $p^{-1}(a)$ für $a > 0$ diffeomorph sind, ebenso die für $a < 0$.

Aufgabe 10 **[$\mathbf{SL(n)}$ ist eine Mannigfaltigkeit]**

Sei $SL(n) := \{A \in M(n) = \mathbb{R}^{n\times n} : \det A = 1\}$.

(i) Zeigen Sie, dass dies eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation ist, und dass die Gruppenoperationen Matrixmultiplikation und Übergang zur Inversen glatt sind.

(ii) Zeigen Sie, dass $SL(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $M(n)$, also eine Lie Gruppe ist.

Hinweis: Um zu zeigen, dass 0 *der einzige kritische Wert der Abbildung* $\det : M(n) \to \mathbb{R}$ *ist, kann man Aufgabe 9 (iii) heranziehen.*

(iii) Zeigen Sie, dass

$$T_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}} SL(n) = \{B \in M(n) : \operatorname{Spur} B = 0\}.$$