Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Patrick Overath

Übungen zur Vorlesung Geometrische Analysis I – Differentialgeometrie für Kurven und Flächen Teil II

Serie 1 vom 11.4.2011

Abgabedatum: 18.4.2011

Aufgabe 1 **[Flächeninhalt des Gaußbildes]**

Sei $X \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ eine Immersion eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $N = n+1$ mit positiver Gauß-Kronecker Krümmung $K(w) = \det((g^{ij}(w)h_{jk}(w))) > 0$ für alle $w \in \Omega$. (Hierbei bezeichnen g^{ij} die Koeffizienten der Inversen der ersten Fundamentalform und h_{jk} die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform von X.) Zeigen Sie, dass dann die Gaußabbildung, also die Einheitsnormale $\nu : \Omega \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^N$ ebenfalls eine Immersion ist, und dass sich der Flächeninhalt $\mathscr{A}_R(X)$ eines sphärischen Flächenstücks $\nu(R) \subset \mathbb{S}^n$ für eine $\mathscr{L}^n$-messbare Teilmenge $R \subset \Omega$ nach der Formel

$$\mathscr{A}_R(\nu) = \int_R K(w)|\det DX(w)|\,dw = \int_R K(w)\sqrt{\det(g_{ij}(w))}\,dw =: \int_R K(w)\,dA$$

berechnet.

Aufgabe 2 **[Rotationsflächen konstanter Gaußkrümmung]** Sei X die Parametrisierung einer Rotationsfläche im $\mathbb{R}^3$ mit einer um die z-Achse rotierten und nach der Bogenlänge parametrisierten Profilkurve $t \mapsto (p^1(t), 0, p^3(t))^T$, $p^1(t) > 0$ für alle $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ (vgl. Beispiel $\boxed{11}$ aus Kapitel 3 der Vorlesung).

(i) Zeigen Sie unter Ausnutzung der Bogenlängenparametrisierung die Darstellung $K = -(p^1)''/p^1$.

(ii) Benutzen Sie Teil (i), um die Rotationsflächen konstanter Gaußscher Krümmung $K = -1, 0, +1$ mit nach Bogenlänge parametrisierter Profilkurve $t \mapsto (p^1(t), 0, p^3(t))^T$, $p^1(t) > 0$, $t \in [a,b]$, zu bestimmen und zu skizzieren. Dabei ermittelt man für die jeweilige gegebene konstante Gaußkrümmung K zunächst die Komponente p^1 der Profilkurve und benutzt dann die Bogenlängenparametrisierung, um auf p^3 zu kommen. Die dabei auftretenden Integrationen können meist nicht explizit ausgeführt werden, bestimmen Sie in jedem Fall den maximalen Definitionsbereich der Profilkurve.

Aufgabe 3 **[Krümmung von Parallelflächen]**

Sei $X \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^3)$ eine Immersion mit Einheitsnormale ν und mit den Hauptkrümmungen $\kappa_1 := 1/r_1$ und $\kappa_2 := 1/r_2$.

(i) Zeigen Sie, dass die *Parallelflächen* $X^r := X + r\nu$ die Hauptkrümmungen $\kappa_i(r) := 1/(r_i - r)$ für $0 < r$ hinreichend klein hat.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (i): Hat X konstante mittlere Krümmung $H = 1/2$, dann hat die Parallelfläche X^1 konstante Gaußkrümmung $K = 1$ und die Parallelfläche X^2 eine konstante mittlere Krümmung $H = -1/2$.

Aufgabe 4 **[Pseudosphäre]**

(i) Bestimmen Sie die Gleichung einer ebenen Kurve gegeben durch einen Graph $\{(x, z(x)) : x > 0\}$ in dem ersten Quadranten der $x - z$-Ebene mit der folgenden Eigenschaft: die Strecke auf der Tangentiallinie an die Kurve zwischen dem Berührpunkt mit der Kurve und der z-Achse hat konstante Länge 1.

(ii) Reparametrisieren Sie die in (i) erzeugte Kurve durch die Substitution $x = \sin t$ und rotieren Sie diese Kurve als Profilkurve um die z-Achse nun im $\mathbb{R}^3$. An welchen Punkten ist diese Fläche immergiert?

(iii) Berechnen Sie an den Punkten, an denen die Fläche immergiert ist, die Gaußsche Krümmung.
