Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Patrick Overath

Übungen zur Vorlesung Geometrische Analysis I – Differentialgeometrie für Kurven und Flächen Teil II

Serie 2 vom 9.5.2011
Abgabedatum: 17.5.2011

Aufgabe 1 **[Erste Variation der Dirichlet-Energie]**

Sei $X \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ eine Immersion eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dann ist die *Dirichlet-Energie* $\mathscr{D}(\gamma)$ einer Kurve $\gamma := X \circ c$ für eine Immersion $c \in C^2([a,b], \mathbb{R}^n)$ mit $c([a,b]) \subset \Omega$ gegeben durch

$$\mathscr{D}(\gamma) := \frac{1}{2} \int_a^b |\gamma'(t)|^2 \, dt.$$

(i) Bestimmen Sie die erste Variation $\delta\mathscr{D}(\gamma, V)$ für das Variationsvektorfeld $V(t) := \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\gamma(t,\varepsilon)$, wobei $\gamma(t,\varepsilon)$ eine zulässige Variation von $\gamma(t)$ ist, d.h. $\gamma(\cdot,\cdot) = X \circ c(\cdot,\cdot)$ für $c(\cdot,\cdot) \in C^2([a,b] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0, \mathbb{R}^n)$ für ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $c(t,0) = c(t)$ für alle $t \in [a,b]$.

(ii) Zeigen Sie für Variationen mit $c(a,\varepsilon) = c(a)$ und $c(b,\varepsilon) = c(b)$ für alle $|\varepsilon| < \varepsilon_0$: Ist c selbst eine geodätische Parameterlinie, dann ist $\delta\mathscr{D}(\gamma, V) = 0$. Folgt aus dem Verschwinden der ersten Variation von $\mathscr{D}$ auch umgekehrt, dass γ eine Geodätische ist?

Aufgabe 2 **[Geodätische auf Sphären]** Ein *Großkreis* auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ erhält man durch Schnitt der Sphäre mit einem zweidimensionalen Unterraum $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Wenn E von der Orthonormalbasis $\{f_1, f_2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aufgespannt wird, dann liefert $\gamma(t) := (\cos t) f_1 + (\sin t) f_2, t \in [0, 2\pi]$ eine Parametrisierung eines Großkreises. Zeigen Sie, dass γ eine Geodätische auf $\mathbb{S}^n$ ist, und dass es außer den Großkreisbögen keine weiteren Geodätischen auf $\mathbb{S}^n$ geben kann.

Aufgabe 3 **[Geodätische auf Rotationsflächen]**

Sei X die Parametrisierung einer Rotationsfläche im $\mathbb{R}^3$ mit einer um die z-Achse rotierten und nach der Bogenlänge parametrisierten Profilkurve $t \mapsto (p^1(t), 0, p^3(t))^T$, $p^1(t) > 0$ für alle $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 11 aus Kapitel 3 der Vorlesung).

(i) Die Kurven $t \mapsto X(t,s)$, also die *Längenkreise* sind Geodäten für fixierte Drehwinkel $s \in \mathbb{R}$.

(ii) Die Kurven $s \mapsto X(t,s)$, also die *Breitenkreise* sind Geodäten für die Profilkurvenparameter $t \in [a,b]$, für die $(p^1)'(t) = 0$ ist.

Hinweis: Man kann zur Lösung dieser Aufgabe das in der Vorlesung hergeleitete ODE-System (GEO) für die geodätischen Parameterlinien studieren.

Aufgabe 4 **[Parallelverschiebung auf der Sphäre]**

Beweisen Sie:

(i) Sind zwei immergierte Flächen $\Sigma := X(\Omega)$, $\tilde{\Sigma} = \tilde{X}(\tilde{\Omega}) \subset \mathbb{R}^N$ für Gebiete $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ tangential entlang einer glatten Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, und ist $V_0 = V(a) \in T_{\gamma(a)}\Sigma = T_{\gamma(a)}\tilde{\Sigma}$, so ist $V(b)$ die Parallelverschiebung von V_0 entlang γ bezüglich Σ genau dann, wenn $V(b)$ die Parallelverschiebung von V_0 entlang γ bezüglich $\tilde{\Sigma}$ ist.

(ii) Sei $\gamma \equiv \Gamma : [0, 2\pi\cos\varphi] \to \Sigma := \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Bogenlängenparametrisierung eines Breitenkreises der Breite $\varphi \in (0, \pi/2)$ (gemessen als Winkel zum Äquator) und $V_0 := \Gamma'(0) \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Parallelverschiebung $V(s)$ von V_0 entlang Γ und dem Tangentvektor $\Gamma'(s)$ für $s \in (0, 2\pi\cos\varphi)$ in Abhängigkeit von φ.

Hinweis: Zu dem Breitenkreis Γ gibt es den Tangentenkegel, *einen Kegel im $\mathbb{R}^3$, der die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2$ längs Γ berührt, so dass man mit Hilfe von Teil* (i) *diesen Kegel zur Berechung des Winkels $\sphericalangle(V(s), \Gamma'(s))$ heranziehen kann. Beachten Sie weiterhin, dass der (geschlitzte) Kegel isometrisch zu einem ebenen Kreissektor ist (vgl. Beispiel $\boxed{6}$ des ersten Semesters), und dass die Parallelverschiebung in ebenen Gebieten die einfache Translation des Anfangsvektors in den Zielpunkt bedeutet. Sie sollten also die Kurve $\tilde{\Gamma}$ in dem ebenen Kreissektor ermitteln, die dem Breitenkreis Γ auf dem Kegel entspricht, und für das transformierte Vektorfeld $\tilde{V}$ tangential an die Ebene entlang $\tilde{\Gamma}$ mit $\tilde{V}_0 := \tilde{\Gamma}'(0)$ den gesuchten Winkel $\sphericalangle(\tilde{V}(s), \tilde{\Gamma}'(s))$ berechnen.*
